

## SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

### 1. Tóm tắt lý thuyết

#### 1.1. Khái niệm

- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến (tăng) trên  $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến (giảm) trên  $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) > f(x_2)$ .

#### 1.2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Cho hàm số  $f$  có đạo hàm trên  $K$ :

- Nếu  $f$  đồng biến trên  $K$  thì  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in K$ .
- Nếu  $f$  nghịch biến trên  $K$  thì  $f'(x) \leq 0$  với mọi  $x \in K$ .

#### 1.3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Cho hàm số  $f$  có đạo hàm trên  $K$ :

- Nếu  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc  $K$  thì  $f$  đồng biến trên  $K$ .
- Nếu  $f'(x) \leq 0$  với mọi  $x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc  $K$  thì  $f$  nghịch biến trên  $K$ .
- Nếu  $f'(x) = 0$  với mọi  $x \in K$  thì  $f$  là hàm hằng trên  $K$ .

#### 1.4. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

- Bước 1: Tìm tập xác định
- Bước 2: Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

### 2. Bài tập minh họa

#### 2.1. Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau:  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số:  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$+$
$y$	↗		

Kết luận: Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

#### 2.2. Dạng 2: Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên một miền

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hướng dẫn giải

Xét hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 6x + m$$

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m < 0 \Leftrightarrow m \geq 3$

Kết luận: với  $m \geq 3$  thì hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

### 3. Luyện tập

#### 3.1. Bài tập tự luận

**Câu 1:** Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

a)  $y = 3x^2 - 8x^3$

b)  $y = 16x + 2x^2 - \frac{16}{3}x^3 - x^4$

c)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

d)  $y = x^4 + 8x^2 + 5$

**Câu 2:** Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$

b)  $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$

**Câu 3:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{3-2x}{x+7}$

b)  $y = \frac{1}{(x-5)^2}$

c)  $y = \frac{2x}{x^2-9}$

**Câu 4:** Xác định tham số m để hàm số sau:

a)  $y = \frac{mx-4}{x-m}$  đồng biến trên từng khoảng xác định

b)  $y = -x^3 + mx^2 - 3x + 4$  nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$

**Câu 5:** Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$3(\cos x - 1) + 2\sin x + 6x = 0$$

#### 3.2. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = x^2(3-x)$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = \sqrt{x^2-1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$

**Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số  $y = x^3 - mx^2 + 3x + 4$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

- A.  $-2 \leq m \leq 2$
- B.  $-3 \leq m \leq 3$
- C.  $m \geq 3$
- D.  $m \leq -3$

**Câu 4:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

- A.  $(-\infty; 1)$
- B.  $[1; +\infty)$
- C.  $[-1; 1]$
- D.  $(-\infty; -1]$

**Câu 5:** Tìm tập hợp tất cả giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số

$$y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (-1; +\infty).$$

- A.  $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$
- B.  $m \in [1; +\infty)$
- C.  $m \in (-1; 2)$
- D.  $m \in [1; 2)$

#### 4. Kết luận

Nội dung bài học sẽ giúp các em nắm được

- Khái niệm thế nào là hàm số đồng biến, nghịch biến
- Điều kiện để hàm số đơn điệu trên một miền
- Các ví dụ minh họa các dạng toán liên quan đến tính đơn điệu của hàm số sẽ giúp các em hình thành và phát triển kỹ năng giải bài tập ở dạng toán này.