# GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

## 1. Tóm tắt lý thuyết

### 1.1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

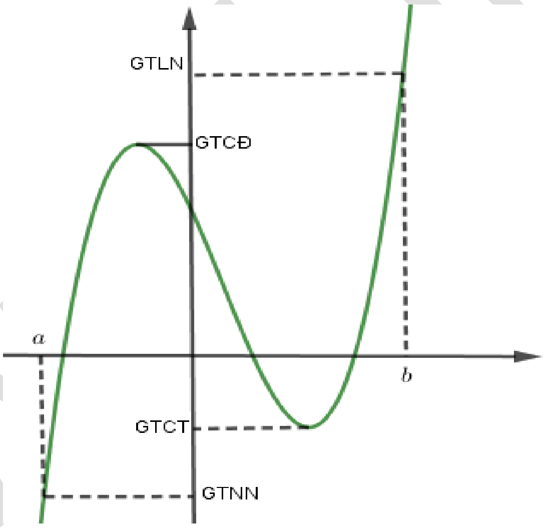
- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu $\begin{cases} f\left(x\right) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = M \end{cases}$

  Kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f\left(x\right)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f\left(x\right)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu $\begin{cases} f\left(x\right) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = m \end{cases}$

  Kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f\left(x\right)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f\left(x\right)$

  (Cần chú ý phân biệt GTLN, GTNN với cực đại, cực tiểu của hàm số, dưới đây là hình vẽ minh họa GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$ để các em phân biệt.)




### 1.2. Một số dạng toán thường gặp

**a) Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn.**

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$

Phương pháp:

- Bước 1: Tính y', giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm $x_1$, $x_2$, ...$x_n$ thỏa mãn $a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b$

- Bước 2: Tính các giá trị $f\left(a\right), f\left(x_1\right), ..., f\left(x_n\right), f\left(b\right)$

- Bước 3: So sánh các giá trị tính được ở trên và kết luận:

- Giá trị lớn nhất tìm được trong số các giá trị ở trên là GTLN M của hàm số trên $\left[a;b\right]$

- Giá trị nhỏ nhất tìm được trong số các giá trị ở trên là GTNN m của hàm số trên $[a;b]$

**b) Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng.**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác đinh và liên tục trên $(a;b)$

Phương pháp:

- Bước 1: Tính $f'(x)$, giải phương trình \(y' = 0\) tìm các nghiệm $x_1$, $x_2$, ...$x_n$ thỏa mãn $a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b$

- Bước 2: Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ và $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x); B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

- Bước 3: So sánh các giá trị tính được và kết luận.

  - Nếu GTLN (hoặc GTNN) trong số các giá trị ở trên là A hoặc B thì kết luận hàm số không có GTLN (hoặc GTNN) trên khoảng $(a;b)$
  - Nếu GTLN (hoặc GTNN) trong số các giá trị ở trên là $f(x_i), i\in\{1;2;...;n\}$ thì kết luận hàm số đạt GTLN (hoặc GTNN) bằng $f(x_i) khi\, x=x_i$

**c) Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để hàm số có GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện cho trước**

Cho hàm số $y=f(x)$xác đinh và liên tục trên đoạn $[a;b]$

Phương pháp: (chỉ áp dụng cho một số bài toán dễ dàng tìm được nghiệm của y')

- Bước 1: Tính y', giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm $x_1$, $x_2$, ...$x_n$

- Bước 2: Tính các giá trị $f(a), f(x_1),..., f(x_n), f(b)$

- Bước 3: Biện luận theo tham số để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$

- Bước 4: Thay vào điều kiện bài cho để tìm m

## 2. Bài tập minh hoạ

### 2.1. Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

Tìm GTLN-GTNN của các hàm số: $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+1$ trên đoạn $[-1;0]$

**Hướng dẫn giải**

Hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+1$ xác định trên đoạn $[-1;0]$

- $f'(x)=-x^2+2x-2$
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x-2=0$
- Ta có: $f(-1)=\frac{11}{3}; f(0)=1$

- Vậy $\max\limits_{[-1;0]} f\left(x\right)=\dfrac{11}{3};\ \min\limits_{[-1;0]} f\left(x\right)=1$

### 2.2. Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

Tìm GTLN-GTNN của các hàm số: $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}, x\in(1;3]$

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$ xác định trên (1;3]

- $y'=\dfrac{x^2-2x-5}{(x+1)^2}$
- $y'=0\Rightarrow x^2-2x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{6}\notin(1;3]\\ x=1-\sqrt{6}\notin(1;3]\end{array}\right.$
- Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $1-\sqrt{6}$ | | $1$ | | $3$ | | $1+\sqrt{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | | | \|\| $+\infty$ | | $9$ | | | | |

- Vậy hàm số có giá trị nhỏ nhất $\underset{x\in(1;3]}{Min}\, y=9$, hàm số không có giá trị lớn nhất.

### 2.3. Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để hàm số có GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn [0; 3] bằng -2.

**Hướng dẫn giải**

TXĐ: $D\ =\ R\backslash\{-8\}$

Ta có: $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0\ \forall x\neq -8$

Khi đó: $\min\limits_{[-1;1]} y=y(0)=-\dfrac{m^2}{8}=-2\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow m=\pm 4$

## 3. Luyện tập

### 3.1. Bài tập tự luận

**Câu 1:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) f(x) = -3$x^2$ + 4x – 8 trên đoạn [0; 1]

b) f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn [-4; 3]

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ trên đoạn [-4; 4]

**Câu 2:** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{4 + x^2}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$

**Câu 3:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn [2;4].

**Câu 4:** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

**Câu 5:** Cho số dương m. Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là

### 3.2. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - 5$ trên đoạn [0;3] bằng:

A. - 1 B. 1 C. 2 D. 0

**Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn [-4;3] bằng:

A. - 5 B. 0 C. 7 D. - 12

**Câu 3:** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 1$ trên đoạn [1;8].

A. m = -2

B. m = 1

C. m = -3

D. m = -5

**Câu 4:** Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$ trên tập xác định. Tính M - m.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 5:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ trên $[-4; 4]$

A. $\underset{[-4;4]}{Min}\, y = 21$

B. $\underset{[-4;4]}{Min}\, y = -14$

C. $\underset{[-4;4]}{Min}\, y = 11$

D. $\underset{[-4;4]}{Min}\, y = -70$

## 4. Kết luận

Qua bài học này giúp học sinh

- Hiểu được GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn của một số hàm thường gặp
- Nắm được các phương pháp tìm GTLN và GTNN của một số hàm số có đạo hàm trên một khoảng, một đoạn.