

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và điểm $x_0 \in (a ; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (x_0 - h ; x_0 + h), x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - h ; x_0 + h), x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

1.2 Định lí 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ ($h > 0$) và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$

- Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0 | \forall (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0 | \forall (x_0; x_0 + h) \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số
- Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0 | \forall (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0 | \forall (x_0; x_0 + h) \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số

1.3 Định lí 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ ($h > 0$).

- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f .
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số f .

1.4 Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các nghiệm x_i của phương trình $f'(x)=0$.
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của các điểm x_i .

(Chú ý: nếu $f''(x_i)=0$ thì ta phải dùng quy tắc 1 để xét cực trị tại x_i .)

2. Bài tập minh họa

2.1 Bài tập 1

Tìm các điểm cực đại, cực tiểu của các hàm số sau: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$

Lời giải:

Xét hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$

Cách 1:Hàm số có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\frac{23}{3}$	$+\infty$	

Kết luận:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại tương ứng là $y(-1) = 3$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$, giá trị cực tiểu tương ứng là $y_{CD} = -\frac{23}{3}$ **Cách 2:**Hàm số có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y'' = 2x - 2$$

 $y''(-1) = -4 < 0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại tương ứng là $y(-1) = 3$.

 $y''(3) = 4 > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$, giá trị cực tiểu tương ứng là $y_{CD} = -\frac{23}{3}$
2.2 Bài tập 2Tìm m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có 2 cực trị

Lời giải:

Với $m = -2$ hàm số trở thành $y = 3x^2 - 2x - 5$ không thể có hai cực trị. (1)Với $m \neq -2$ ta có: $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$ Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.Điều này xảy ra khi: $\Delta' = -3(m^2 + 2m - 3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$. (2)

Từ (1) (2) suy ra hàm số có hai cực trị khi: $m \in (-3; -2) \cup (-2; 1)$

3. Luyện tập

3.1 Bài tập tự luận

Câu 1: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -2x^2 + 7x - 5$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

d) $y = (x+1)^3(5-x)$

Câu 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x^2+8}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$

c) $y = \frac{x^2 + x - 5}{x+1}$

Câu 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}$

b) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$

Câu 4: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$

b) $y = \cos x - \sin x$

c) $y = \sin^2 x$

Câu 5: Xác định giá trị của m để hàm số sau có cực trị: $y = x^3 + 2mx^2 + mx - 1$

3.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^4(x-1)(2-x)^3(x-4)^2$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Câu 2: Gọi A và B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Tính độ dài AB.

- A. $AB = 2\sqrt{2}$
- B. $AB = 4\sqrt{2}$
- C. $AB = \sqrt{2}$
- D. $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 3: Biết $M(0;5), N(2;-11)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Tính giá trị của hàm số tại $x=2$.

- A. $f(2) = 1$
- B. $f(2) = -3$
- C. $f(2) = -7$
- D. $f(2) = -11$

Câu 4: Hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có mấy điểm cực đại?

- A. 0
- B. 2
- C. 3
- D. 1

Câu 5: Xác định giá trị của tham số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 5$ có cực trị:

- A. $m = 3$
- B. $(m \in [3; +\infty))$
- C. $m < 3$
- D. $m > 3$

4. Kết luận

Qua bài học này giúp các em nắm được:

- Biết các khái niệm cực đại, cực tiểu.
- Biết phân biệt các khái niệm lớn nhất, nhỏ nhất.
- Biết các điều kiện đủ để hàm số có cực trị và các quy tắc tìm cực trị.