

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

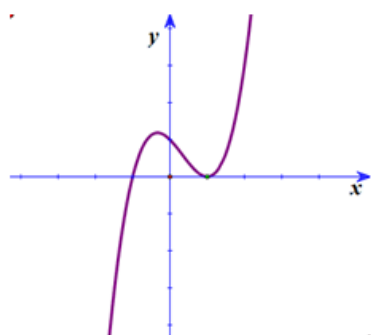
- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số
- Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$, tìm nghiệm của phương trình
- Bước 3: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (nếu có)
- Bước 4: Lập bảng biến thiên
- Bước 5: Kết luận tính biến thiên và cực trị (nếu có)
- Bước 6: Nêu tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).
- Bước 7: Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (giao với trục Ox, Oy, các điểm đối xứng, ...)
- Bước 8: Vẽ đồ thị.

1.2. Chú ý

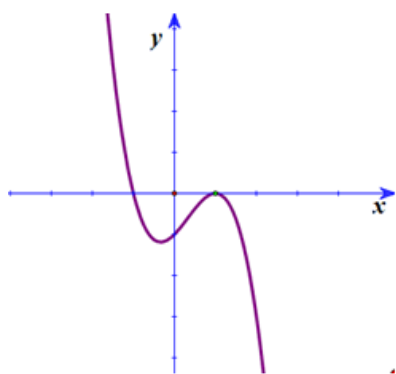
- Đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm $I(x_0, f(x_0))$ với x_0 là nghiệm phương trình $f''(x_0) = 0$ làm tâm đối xứng.
- Đồ thị hàm số phân thức bậc nhất nhận giao của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.
- Đồ thị hàm số chẵn nhận Oy làm trục đối xứng.

1.3. Các dạng đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Đồ thị có 2 điểm cực trị

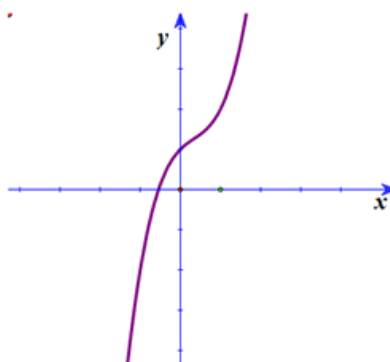


$$a > 0$$

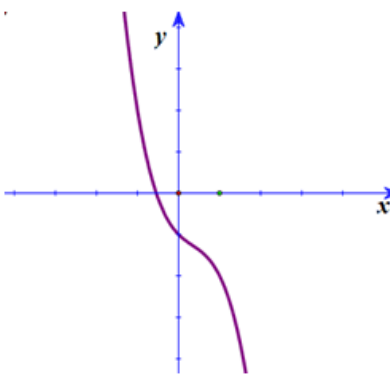


$$a < 0$$

Đồ thị không có điểm cực trị

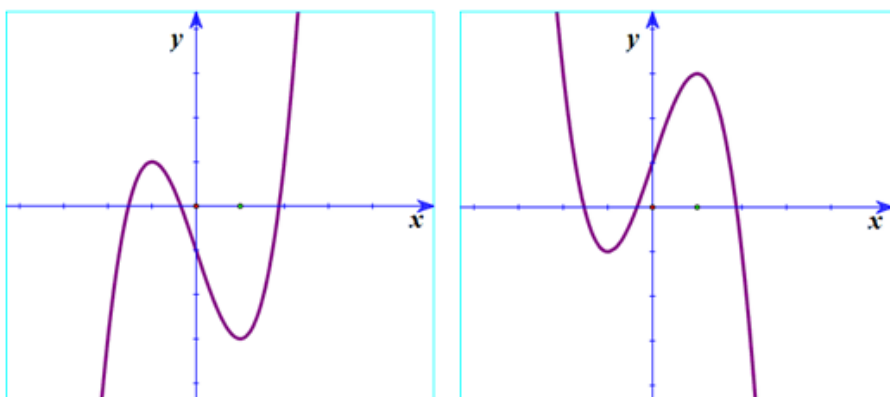


$$a > 0$$



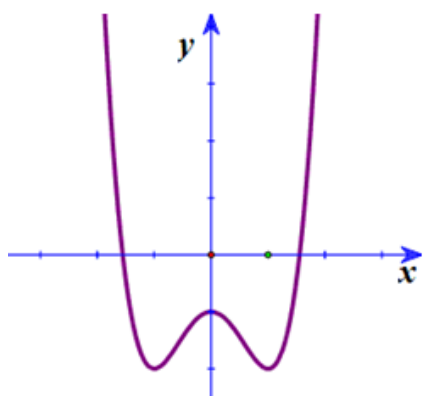
$$a < 0$$

- Lưu ý: Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm 2 phía so với trục Oy khi $ac < 0$

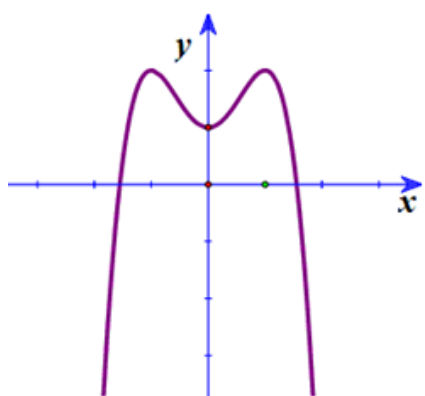


1.4. Các dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Đồ thị có 3 điểm cực trị

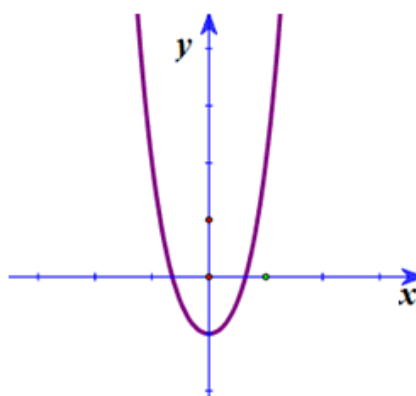


$a > 0$

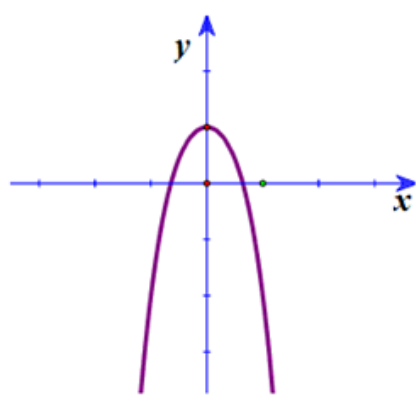


$a < 0$

Đồ thị có 1 điểm cực trị

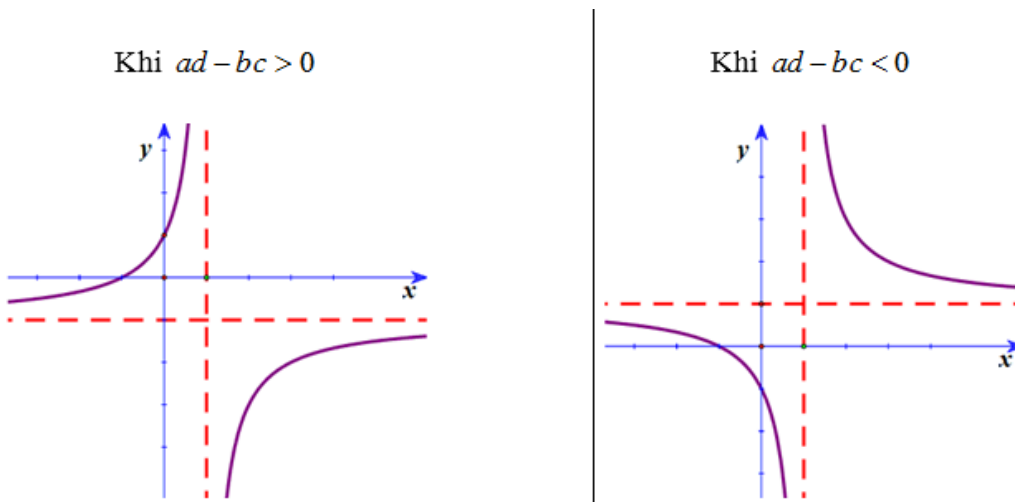


$a > 0$



$a < 0$

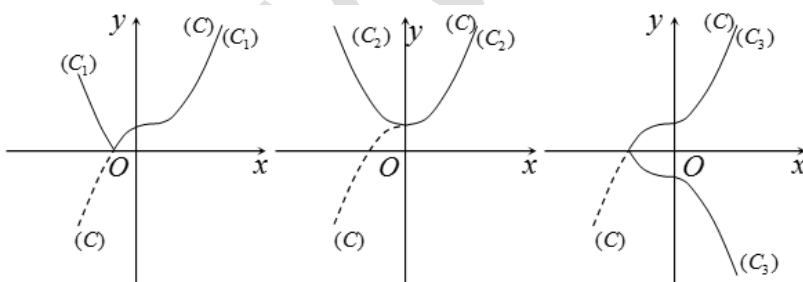
1.5. Các dạng đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ab - bc \neq 0$)



1.6. Biến đổi đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Khi đó, với số $a > 0$ ta có:

- Hàm số $y = f(x) + a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x) - a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x + a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
- Hàm số $y = f(x - a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
- Hàm số $y = -f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Ox.
- Hàm số $y = f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Oy.
- Hàm số $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > 0 \\ f(-x) & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:
 - Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.
 - Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy.



(C₁): $y_1 = |f(x)|$ (C₂): $y_2 = f(|x|)$ (C₃): $|y_3| = f(x)$

- Hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:
 - Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.
 - Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

2. Bài tập minh họa

2.1. Dạng 1: Khảo sát hàm số bậc 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Hướng dẫn giải

+ Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Bước 2: $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Bước 3: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+ Bước 4: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

CD *CT*

+ Bước 5: Vậy

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$; giá trị cực đại là $y=2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$; giá trị cực tiểu là $y=-2$.

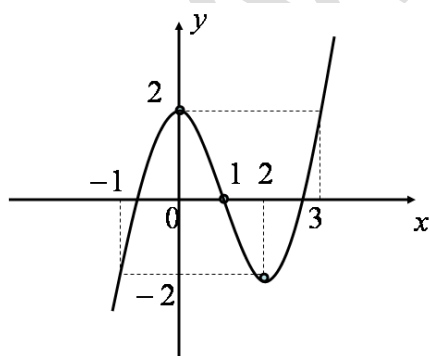
+ Bước 6: $y'' = 6x - 6$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$$

Vậy đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.

+ Bước 7: Cho: $x = -1 \Rightarrow y = -2$; $x = 3 \Rightarrow y = 2$

+ Bước 8: Đồ thị hàm số:



2.2. Dạng 2: Khảo sát hàm số trùng phương

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

Hướng dẫn giải

+ Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Bước 2: $y' = -4x^3 + 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

+ Bước 3: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

+ Bước 4: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	↗ 2 CD		↘ 1 CT	↗ 2 CD		$-\infty$	

+ Bước 5: Vậy:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 1$; giá trị cực đại $y = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; giá trị cực tiểu $y = 1$.

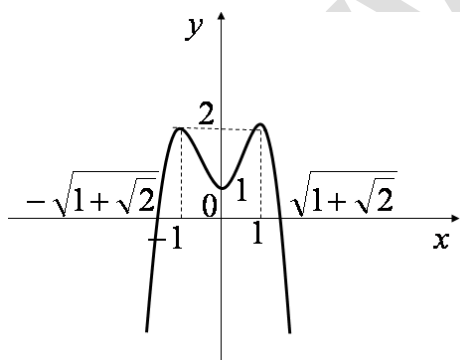
+ Bước 6: Đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng.

+ Bước 7:

$$y = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + \sqrt{2} \\ x^2 = 1 - \sqrt{2} (L) \end{cases} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

+ Bước 8: Đồ thị hàm số:



2.3. Dạng 3: Khảo sát hàm số nhất biến

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$

Hướng dẫn giải

+ Bước 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

+ Bước 2: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$

+ Bước 3: Vậy

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

+ Bước 4: Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang.

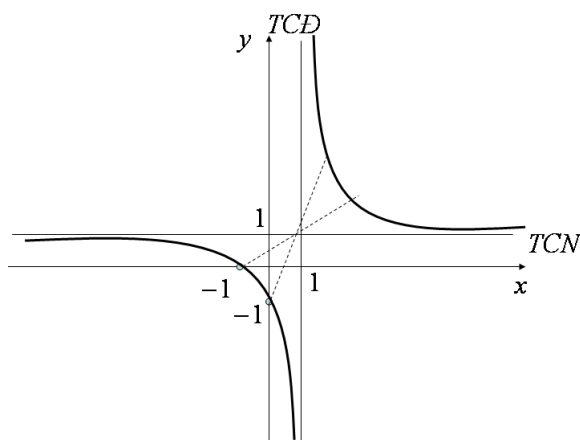
+ Bước 5: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	1		$+\infty$		1

+ Bước 6: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;1)$ là tâm đối xứng.

+ Bước 7: Cho: $x=0 \Rightarrow y=-1$; $y=0 \Rightarrow x=-1$

+ Bước 8: Đồ thị hàm số:



3. Luyện tập

3.1. Bài tập tự luận

Câu 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau

a) $y = 2 + 3x - x^3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

Câu 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số

- a) $y = 2 - 3x - x^2$
 b) $y = x^3 - x^2 + x$
 c) $y = -x^4 + 2x^3 + 3$

Câu 4: Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số

- a) $y = \frac{x-2}{x+1}$
 b) $y = \frac{2-x}{2x-1}$

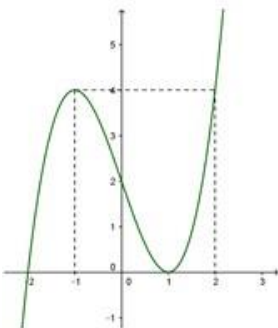
Câu 5: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - mx^2 + 3$ có đúng một cực trị

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
 C. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành
 D. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.

Câu 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x + 2$
 B. $y = x^3 + 3x + 2$
 C. $y = x^3 - 3x + 2$
 D. $y = -x^3 - 3x + 2$

Câu 3: Hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Khi

- A. $m=1$
 B. $m=2$
 C. $m=-3$
 D. $m=4$

Câu 4: Hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 5$ có ba cực trị khi

- A. $-2 < m < 2$
- B. $m=2$
- C. $m < -2$
- D. $m > 2$

Câu 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ là

- A. $y=-24x+40$
- B. $y=24x-40$
- C. $y=-24x-40$
- D. $y=-24x$

4. Kết luận

Qua bài học giúp học sinh

- Biết sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số: tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- Biết cách phân loại các dạng đồ thị hàm số.