# ÔN TẬP CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

## 1. Tóm tắt lý thuyết

### 1.1. Kiến thức cần nhớ

- Sự đơn điệu của hàm số.
- Cực trị của hàm số.
- Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

### 1.2. Một số dạng toán về sự đơn điệu của hàm số thường gặp

- Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số
- Dạng 2: Định giá trị của tham số m để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên TXĐ.

### 1.3. Một số dạng toán về cực trị của hàm số thường gặp

+ Dạng 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số: Dùng quy tắc 1 hoặc quy tắc 2.

+ Dạng 2: Định giá trị tham số m để hàm số đạt cực trị tại $x_0$

- Tìm tập xác định.
- Tính $y' \Rightarrow y'(x_0)$.
- Lập luận: Hàm số đạt cực đại tại $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$, giải phương trình tìm được m.
- Với từng giá trị m vừa tìm được ta dùng quy tắc 1 hoặc quy tắc 2 kiểm tra lại xem có thỏa điều kiện đề bài không.
- Kết luận giá trị m thỏa điều kiện.

+ Dạng 3: Định giá trị của tham số m để các hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ và $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}\ (a, m \neq 0)$ cực đại, cực tiểu:

- Tìm tập xác định D.
- Tính y'
- Tính $\Delta_{y'}$
- Lập luận: Hàm số luôn luôn có CĐ, CT khi và chỉ khi phương trình y'=0 có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu hai lần khác nhau khi qua hai nghiệm đó. Phương trình y'=0 có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta_{y'} > 0$ giải tìm m.

+ Dạng 4: Định giá trị của tham số m để các hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ và $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}\ (a, m \neq 0)$ không có cực đại, cực tiểu:

- Tìm tập xác định D
- Tính y'
- Tính $\Delta_{y'}$
- Lập luận: Hàm số không có CĐ, CT khi và chỉ khi phương trình y'=0 vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Phương trình y'=0 có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta_{y'} \le 0$ giải tìm m.

+ Dạng 5: Chứng minh với mọi giá trị của tham số m hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ luôn luôn có cực đại, cực tiểu.

- Tìm tập xác đinh D
- Tính y'

- Tính $\Delta_{y'}$ (nếu y' là tam thức bậc 2 theo x).
- Chứng minh: $\Delta_{y'} > 0$ và y' đổi dấu hai lần khác nhau khi qua hai nghiệm đó suy ra hàm số luôn luôn có cực đại, cực tiểu.

### 1.4. Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm số

- Tìm GTLN - GTNN của hàm sô trên một khoảng, nửa khoảng.
- Tìm GTLN - GTNN của hàm số trên một đoạn.

### 1.5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc ba.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc bốn (trùng phương)
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức bậc nhất/bậc nhất (hàm nhất biến).

### 1.6. Bài toán về sự tương giao của đồ thị hàm số

- Tìm số giao điểm của hai đường ($C_1$):y=f(x) và ($C_2$):y=g(x)
- Biện luận theo m nghiệm của phương trình f(x)=m

## 2. Bài tập minh họa

### 2.1. Dạng 1: Tìm GTLN và GTNN

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - ln4x$ trên đoạn [1;e].

**<u>Hướng dẫn giải</u>**

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn [1;e].

$f'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x}$; với $x \in [1;e]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$f(1) = 1;\ f(e) = e^2 - 4;\ f(\sqrt{2}) = 2 - 2ln2$

Do đó:

$\min\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2 - 2ln2$

$\max\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(e) = e^2 - 4$

### 2.2. Dạng 2: Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm m để hàm số:

a) Có cực đại và cực tiểu.

b) Đạt cực đại tại điểm x=1.

**<u>Hướng dẫn giải</u>**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

a) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi: y'=0 có 2 nghiệm phân biệt.

Điều này xảy ra khi: $\begin{cases} a_{y'} \neq 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-m)^2 - (m^2 - m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m >$

b) Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 1

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$ và y''=2x-2m

Ta có: $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với m=2 hàm số đạt cực đại tại x=1.

### 2.3. Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có nghiệm

Cho hàm số $y=-x^4+(m+2)x^2-m-1$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 2.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox:

$$-x^4+(m+2)x^2-m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ x^2=m+1 \end{array}\right. (1)$$

(C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m\neq 0 \end{cases}$$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow x=-1 \cup x=1 \cup x=-\sqrt{m+1} \cup x=\sqrt{m+1}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{m+1}<2 \Leftrightarrow m+1<4 \Leftrightarrow m<3$

So với điều kiện (*) ta có giá trị cần tìm là: $\begin{cases} -1<m<3 \\ m\neq 0 \end{cases}$

**2.4. Dạng 4: Định tham số m để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến**

Định m để hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ nghịch biến trên khoảng (-1;1).

**Hướng dẫn giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x+m+1$

Hàm số nghịch biến trên khoảng (-1;1) khi và chỉ khi $y'\leq 0, \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x+m+1\leq 0, \forall x\in(-1;1)$ (1)

Xét BPT (1) $\Leftrightarrow m\leq -3x^2-6x-1=g(x)$

Xét hàm số $g(x), x\in(-1;1)$

Có: $g'(x)=-6x-6\leq 0, \forall x\in(-1;1)$

BBT:

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $-10$ |

Từ BBT suy ra $m\leq g(x), \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow m\leq -10$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng (-1;1) khi và chỉ khi $m\leq 10$.

## 3. Luyện tập

### 3.1. Bài tập tự luận

**Câu 1:** Cho hàm số: $y=4x^3+mx$ với m là tham số) (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với m = 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng y = 13x + 1.

c) Xét sự biến thiên của hàm số (1) tùy thuộc giá trị của m.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=\frac{(a-1)x^3}{3}+ax^2+(3a-2)x$

a) Xác định a để hàm số luôn luôn đồng biến.

b) Xác định a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**Câu 3:** Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

**Câu 4:** Cho hàm số: $y = f(x) = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

b) Xác định m để đồ thị $(C_m)$ của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

### 3.2. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ trên đoạn [0;2].

A. $M = \frac{2}{5}; m = 0$

B. $M = \frac{1}{2}; m = 0$

C. $M = 1; m = \frac{1}{2}$

D. $M = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{2}$

**Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ biết $f'(x) = x(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có 2 điểm cực trị tại x=0 và x=1.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x=0 và cực đại tại điểm x=1.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng (0;1).

D. Hàm số không có điểm cực đại.

**Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{(m-1)\sin x - 2}{\sin x - m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in (-1;2)$

B. $m \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$

C. $m \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$

D. $m \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$

**Câu 4:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^3 + x^2 + x = m(x^2+1)^2$ có nghiệm thuộc đoạn [0;1].

A. $m \ge 1$

B. $m \le 1$

C. $0 \le m \le 1$

D. $0 \le m \le \frac{3}{4}$

**Câu 5:** Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

A. $x = \pm 1$

B. x=- 1

C. x= 1

D. x=0

## 4. Kết luận

Qua bài học này giúp học sinh

- Hiểu định nghĩa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số và mối liên hệ giữa khái niệm này với đạo hàm.
- Nắm được qui tắc xét tính đơn điệu của hàm số.
- Biết vận dụng quy tắc xét tính đơn điệu của một hàm số và dấu đạo hàm của nó