BÀI 4: ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1.Giải bài 1 trang 30 SGK Toán GT lớp 12

Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{x}{2-x}$

b) $y = \frac{-x+7}{x+1}$

c) $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

d) $y = \frac{7}{x} - 1$

1.1. Phương pháp giải

- Để giải bài 1, các em cùng ôn lại lý thuyết về sự tồn tại tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- Đường thẳng y=b được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y = f(x) nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b; \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$
- Đường thẳng \(x=a\) được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số \(y = f(x)\) nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau
  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty; \ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

- Với hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}\left(c \ne 0; ad - bc \ne 0\right)$ ta có thể suy ra ngay tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$, tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$

1.2. Hướng dẫn giải

Câu a: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2-x}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty; \ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{2-x} = -\infty$

Nên đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2-x} = -1; \ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2-x} = -1$

Nên đường thẳng y = -1 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu b: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+7}{x+1}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{-x+7}{x+1} = +\infty; \ \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{-x+7}{x+1} = -\infty$

Nên x = -1 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+7}{x+1} = -1; \ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x+7}{x+1} = -1$

Nên đường thẳng y = -1 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu c: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}\frac{2x-5}{5x-2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-}\frac{2x-5}{5x-2}=+\infty$

Nên đường thẳng $x=\frac{2}{5}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{5x-2}=\frac{2}{5};\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{5x-2}=\frac{2}{5}$

Nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=\frac{2}{5}$ làm tiệm cận ngang.

Câu d: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{x}-1\right)=-1;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{x}-1\right)=-1$

Nên đường thẳng y = -1 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{7}{x}-1\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{7}{x}-1\right)=-\infty$

Nên đường thẳng x = 0 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. Giải bài 2 trang 30 SGK Toán GT lớp 12

Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

a) $y=\frac{2-x}{9-x^2}$

b) $y=\frac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}$

c) $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

d) $y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

2.1. Phương pháp giải

- Đường thẳng y=b được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y = f(x) nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau
  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$
- Đường thẳng \(x=a\) được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số \(y = f(x)\) nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau
  $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$
- Với hàm số $y=f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ để tìm tiệm cận đứng ta tiến hành giải phương trình g(x) = 0. Giả sử nếu x0 là nghiệm của phương trình g(x) = 0, nếu h(x0) khác 0, thì đường thẳng x = x0 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số y = f(x)

2.2. Phương pháp giải

Câu a: Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2-x}{9-x^2}$

$\lim\limits_{x\to(-3)^-}\frac{2-x}{9-x^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{2-x}{9-x^2}=+\infty$

Nên đường thẳng x = -3 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2-x}{9-x^2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2-x}{9-x^2}=-\infty$

Nên đường thẳng x = 3 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-x}{9-x^2}=0;\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x}{9-x^2}=0$

Nên đường thẳng y = 0 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu b: Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}$

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{5}\right)^+}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{5}\right)^-}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=+\infty$

Nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng: $x=-1; x=\dfrac{3}{5}$

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=-\dfrac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}=-\dfrac{1}{5}$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-\dfrac{1}{5}$

Câu c: Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=+\infty$

Nên đường thẳng x = -1 là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=+\infty$

Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu d: Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1\end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-\infty$

(hoặc $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=+\infty$) nên đường thẳng x = 1 là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})}=1$

nên đường thẳng y = 1 là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số