

# MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

## 1. Lý thuyết

### 1.1. Phương trình bậc nhất với một hàm số lượng giác

#### a) Định nghĩa:

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng  $at + b = 0$  trong đó  $a, b$  là các hằng số ( $a \neq 0$ ) và  $t$  là một trong các hàm số lượng giác.

Ví dụ:  $2 \sin x - 1 = 0$ ;  $\cos 2x + \frac{1}{2} = 0$ ;  $3 \tan x - 1 = 0$ ;  $\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$

b) Phương pháp: Đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

### 1.2. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ , $\cos x$ , $\tan x$ , $\cot x$

#### a) Dạng phương trình

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

#### b) Cách giải

Đặt:  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$t = \tan x$

$t = \cot x$

#### c) Chú ý

Nếu  $a$  là một số cho trước mà  $\tan \alpha$  xác định thì phương trình  $\tan x = \tan \alpha$  có nghiệm  $x = \alpha + k\pi$  thoả điều kiện  $\cos x \neq 0$ .

Phương trình  $\tan P(x) = \tan Q(x)$  thì cần phải chú ý đến điều kiện  $\cos P(x) \neq 0$  và  $\cos Q(x) \neq 0$ .

### 1.3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

#### a) Dạng phương trình

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

Điều kiện có nghiệm:  $a^2 + b^2 \geq c^2$

#### b) Cách giải

Cách 1: Chia hai vế của (1) cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1 \text{ nên ta đặt } \begin{cases} \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$\sin x \sin \varphi + \cos x \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt  $\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$  ta được phương trình lượng giác cơ bản.

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể đặt } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Cách 2:

- Xét  $\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  có là nghiệm của (1) không
- Xét  $\cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}. \text{ Khi đó } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Phương trình trở thành:

$$a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (2)$$

Giải (2) theo t, tìm được t thay vào  $t = \tan \frac{x}{2}$  suy ra x

Cách 3:

$$\text{Nếu } a \neq 0 \text{ chia 2 vế cho } a \text{ rồi ta đặt } \tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

Đặt  $\sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \alpha$  ta được phương trình lượng giác cơ bản  $\sin(x+\alpha) = \sin \varphi$ .

## 2. Bài tập minh họa

### 2.1. Dạng 1: Giải phương trình bậc nhất

Giải các phương trình sau:

a)  $2\sin x - 1 = 0$ .

b)  $\cos 2x + \frac{1}{2} = 0$ .

c)  $3\tan x - 1 = 0$ .

d)  $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$ .

e)  $2\cos x - \sin 2x = 0$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } \cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } 3\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{C})$$

$$\text{d) } \sqrt{3}\cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{e) } \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

### 2.2. Dạng 2: Giải phương trình bậc hai

Giải các phương trình sau:

a)  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

b)  $\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

c)  $3\sin^2 x + 7\cos 2x - 3 = 0$

d)  $\frac{1}{\cos^2 x} - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$

**Hướng dẫn giải:**

a)  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0(1)$

Đặt  $t = \sin x$ , điều kiện  $|t| \leq 1$ . Phương trình (1) trở thành:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhân)} \\ t = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t=1$ , ta được  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ 

b)  $\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0(2)$

Đặt  $t = \cos x$ , điều kiện  $|t| \leq 1$ . Phương trình (2) trở thành:

$$t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ (nhân)} \\ t = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$  ta được  $\cos x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ 

c)  $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - \cos^2 2x) + 7\cos 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x - 7\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(3\cos 2x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 3\cos 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

\*) Giải phương trình:  $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

\*) Giải phương trình:  $3\cos 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{7}{3}$

Vì  $\frac{7}{3} > 1$  nên phương trình  $3\cos 2x - 7 = 0$  vô nghiệm.Kết luận: vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ 

d)  $\frac{1}{\cos^2 x} - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$

Điều kiện:  $\cos x \neq 0$  (\*)

(3)  $\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$

Đặt  $t = \tan x$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } t^2 - (1 + \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$+ \text{ Với } t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

So sánh với điều kiện (\*) suy ra nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

### 2.3. Dạng 3: Giải phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{6} \cos 3x = 2$$

$$\text{b) } (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{c) } 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$$

#### Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } \sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{6} \cos 3x = 2 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 3x + \tan \frac{\pi}{3} \cos 3x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos 3x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là  $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\text{b) } (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

Xét  $\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$  không là nghiệm của phương trình (2)

Xét  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$

Đặt  $t = \tan \frac{x}{2}$ . Khi đó  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  và  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình (2) trở thành:  $(2+\sqrt{3})\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2+\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})2t-1+t^2 = (2+\sqrt{3})(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3})t^2 - 2(2+\sqrt{3})t + 3+\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{3} \end{cases}$$

+ Với  $t=1 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

+ Với  $t=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của (2) là  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

c)  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$  (3)

$$(3) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x \cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

Điều kiện có nghiệm của phương trình:  $a^2 + b^2 \geq c^2$

Khi đó:  $2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \geq (3 - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{2} \geq 11 - 6\sqrt{2}$  (không thỏa)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

### 3. Luyện tập

#### 3.1. Bài tập tự luận

**Câu 1.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{3}\cos x - 2 = 0.$

b)  $\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

c)  $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0.$

d)  $\tan x + \sqrt{3} = 0.$

e)  $2\sin x - \sin 2x = 0$

**Câu 2:** Giải các phương trình sau:

a)  $3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0$

b)  $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

c)  $\sin^2 2x + 7\cos 2x - 6 = 0$

$$d) \frac{1}{\sin^2 x} - (1 + \sqrt{3}) \cot x - 1 + \sqrt{3} = 0$$

**Câu 3:** Giải các phương trình sau:

a)  $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = 5$

b)  $(2 - \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 2 - \sqrt{3}$

### 3.2. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Giải phương trình  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ .

A.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 2.** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan 3x - 3 = 0$ .

A.  $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 3.** Khẳng định nào sau đây là đúng về nghiệm của phương trình  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ .

A. Phương trình có một họ nghiệm.

B. Phương trình có hai họ nghiệm.

C. Phương trình có ba họ nghiệm

D. Phương trình vô nghiệm.

**Câu 4.** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0$ .

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 5.** Giải phương trình  $3 \cos x + 4 \sin x = -5$ .

A.  $x = \pi + \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  với  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

B.  $x = \pi + \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  với  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

C.  $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  với  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

D.  $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  với  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

**Câu 6.** Giải phương trình  $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$ .

A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$       B.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$       C.  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$       D. Vô nghiệm.

**Câu 7.** Giải phương trình  $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 4$ .

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D. Vô nghiệm

**Câu 8.** Tìm tất cả các họ nghiệm của phương trình  $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x$ .

A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$       B.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$       C.  $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$       D. A, B, C đều sai.

**Câu 9.** Giải phương trình  $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$ .

A.  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$  và  $x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$  và  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$  và  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D. Vô nghiệm

**Câu 10.** Giải phương trình  $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cdot \cos x$ .

A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$       B.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$       C.  $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$       D.  $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

#### 4. Kết luận

Bài học này giới thiệu đến các em những nội dung cơ bản nhất về một số phương trình lượng giác thường gặp. Đây là một dạng toán nền tảng không chỉ trong phạm vi khảo sát hàm số lượng giác mà còn được ứng dụng trong việc giải phương trình lượng giác, sự đơn điệu của hàm số lượng giác, ....