

PHÉP QUAY

1. Lý thuyết

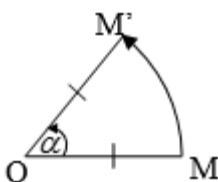
1.1. Định nghĩa phép quay

a) Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho $OM=OM'$ và góc lượng giác (OM,OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .

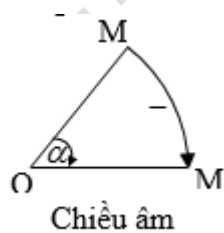
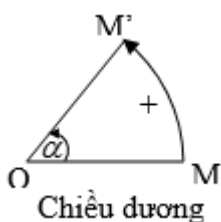
Ký hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$

- Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay.



Nhận xét:

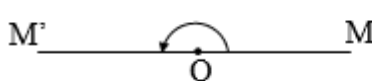
+ Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác, ngược lại là chiều âm.



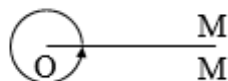
+ Với số nguyên k :

Phép quay $Q_{(O,k2\pi)}$ là phép đồng nhất.

Phép quay $Q_{(O,\pi+k2\pi)}$ là phép đối xứng tâm.



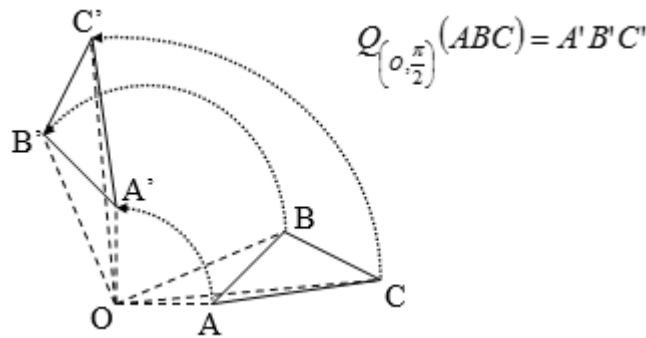
Góc quay π



Góc quay 2π

b) Biểu diễn ảnh của phép quay

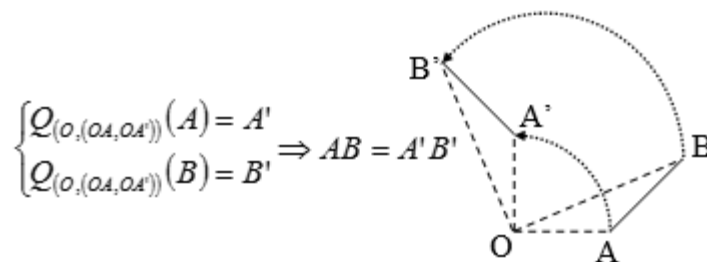
Cho tam giác ABC và điểm O . Hãy biểu diễn ảnh $A'B'C'$ của tam giác ABC qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$.



1.2. Tính chất của phép quay

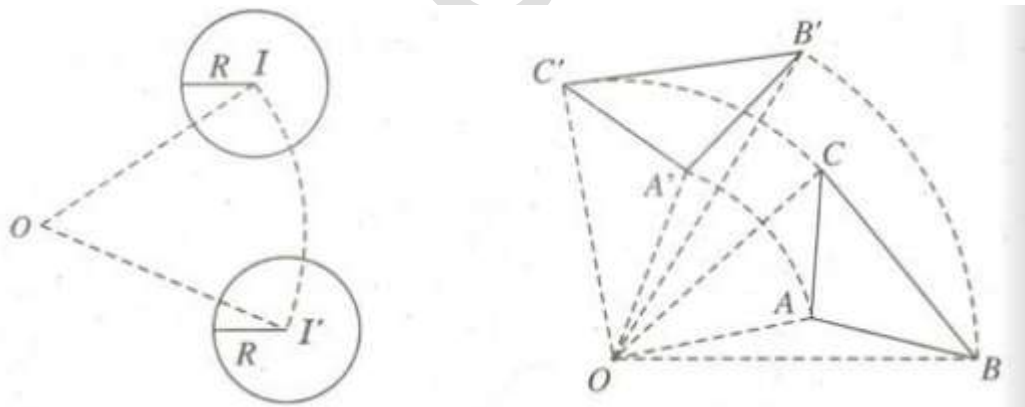
a) Tính chất 1

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.



b) Tính chất 2

Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

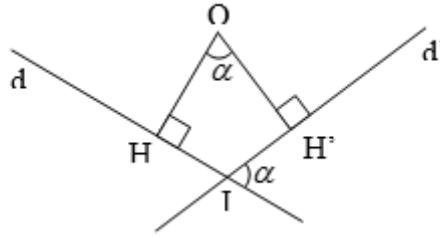


c) Nhận xét

Phép quay góc quay $0 < \alpha < \pi$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho:

+ $(d, d') = \alpha$ nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

+ $(d, d') = \pi - \alpha$ nếu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$

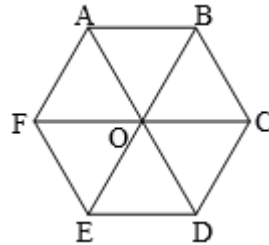


2. Bài tập minh họa

Câu 1: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy xác định ảnh của:

- $\triangle OAB$ qua phép quay tâm O, góc quay 360° .
- $\triangle OAB$ qua phép quay tâm O, góc quay 120° .
- $\triangle OAB$ qua phép quay tâm O, góc quay -180° .
- $\triangle OAB$ qua phép quay tâm O, góc quay -300° .

Hướng dẫn giải:



$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} Q_{(O, 360^\circ)}(A) = A \\ Q_{(O, 360^\circ)}(B) = B \end{cases} \Rightarrow Q_{(O, 360^\circ)}(OAB) = OAB$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} Q_{(O, 120^\circ)}(A) = E \\ Q_{(O, 120^\circ)}(B) = F \end{cases} \Rightarrow Q_{(O, 120^\circ)}(OAB) = OEF.$$

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} Q_{(O, -180^\circ)}(A) = D \\ Q_{(O, -180^\circ)}(B) = E \end{cases} \Rightarrow Q_{(O, -180^\circ)}(OAB) = ODE.$$

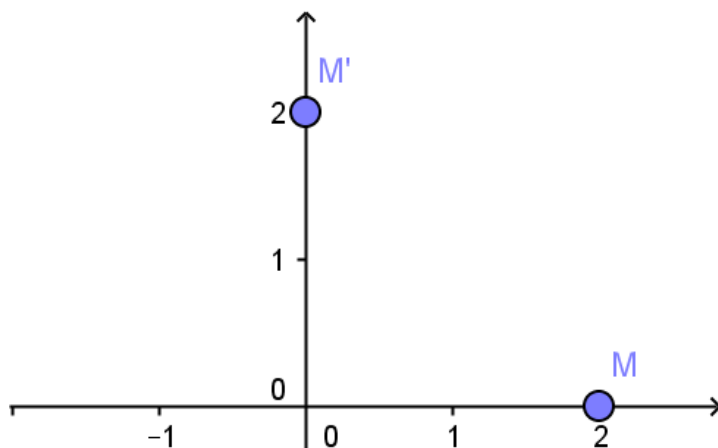
$$\text{d) Ta có: } \begin{cases} Q_{(O, -300^\circ)}(A) = F \\ Q_{(O, -300^\circ)}(B) = A \end{cases} \Rightarrow Q_{(O, -300^\circ)}(OAB) = OFA.$$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;0)$ và đường thẳng $d: x+2y-2=0$, đường tròn $(C): x^2+y^2-4x=0$. Xét phép quay Q tâm O góc quay 90° .

- Tìm ảnh của điểm M qua phép quay Q.
- Tìm ảnh của d qua phép quay Q.
- Tìm ảnh của (C) qua phép quay Q.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: Vì $M(2;0) \in Ox$ nên: $Q_{(0;90^\circ)}(M) = M' : \begin{cases} M' \in Oy \\ OM = OM' \end{cases} \Rightarrow M'(0;2).$



b) Ta có $M(2;0) \in d$, ảnh của M qua phép quay Q theo câu a là $M'(0;2)$.

Gọi d' là ảnh của d qua Q ta có d' là đường thẳng qua M' và vuông góc với d .

Đường thẳng d có VTPT là $\vec{n} = (1;2)$, suy ra d' có VTPT là $\vec{n}' = (2;-1)$

Vậy phương trình của d' là: $2(x-0) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$.

c) Đường tròn (C) có tâm $M(2;0)$ và bán kính $R=2$.

Ảnh của M qua Q là $M'(0;2)$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua Q, (C') có tâm M' và bán kính $R=2$.

Vậy phương trình của (C') là: $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 3: Tìm ảnh của điểm $A(3;4)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° .

Hướng dẫn giải:

Với phép quay tâm O góc 90° điểm A thành $A'(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ (OA; OA') = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2 + 4^2 = x^2 + y^2 \\ \vec{OA} \cdot \vec{OA'} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Do $\alpha = 90^\circ > 0$ phép quay theo chiều dương suy ra: $A'(-4;3)$.

3. Luyện tập**3.1. Bài tập tự luận**

Câu 1: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy xác định ảnh của:

- a) ΔOAB qua phép quay tâm O, góc quay -3000 .
- b) ΔOAB qua phép quay tâm O, góc quay 1800 .
- c) ΔOAB qua phép quay tâm O, góc quay 300 .
- d) ΔOAB qua phép quay tâm O, góc quay 36000 .

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(0;4)$ và đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$, đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y = 0$. Xét phép quay Q tâm O góc quay 60° .

- a) Tìm ảnh của điểm M qua phép quay Q.
- b) Tìm ảnh của d qua phép quay Q.
- c) Tìm ảnh của (C) qua phép quay Q.

Câu 3: Tìm ảnh của điểm $A(-4;-3)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° .

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình vuông ABCD tâm O. Xét phép quay Q có tâm O và góc quay φ . Với giá trị nào sau đây của φ , phép quay Q biến hình vuông ABCD thành chính nó?

- A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- B. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- C. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 2: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay 120° .

- A. ΔAOB .
- B. ΔBOC .
- C. ΔDOC .
- D. ΔEOD .

Câu 3: Tìm ảnh của đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$ qua phép quay tâm O góc 90° .

- A. $x + y + 2 = 0$.
- B. $x - y + 2 = 0$.
- C. $x + y - 2 = 0$.
- D. $x - y - 2 = 0$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của điểm $A(-1;2)$ qua phép quay tâm O góc 90° .

- A. $A'(2;1)$
- B. $A'(-2;-1)$
- C. $A'(-1;-2)$
- D. $A'(1;2)$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ qua phép quay tâm O góc 90° .

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$
- B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
- C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
- D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm M $(-6;1)$ qua phép quay Q(O; 90°) là:

- A. $M'(-1;-6)$
- B. $M'(1;6)$
- C. $M'(-6;-1)$
- D. $M'(6;1)$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy phép quay Q(O; 90°) biến đường thẳng d có phương trình $x - 2y = 0$ thành đường thẳng d' có phương trình:

- A. $x + 2y = 0$
- B. $2x + y = 0$
- C. $2x - y = 0$
- D. $x - y + 2 = 0$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Phép quay tâm O(0;0) góc quay 90° biến (C) thành (C') có phương trình:

- A. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
- B. $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$
- C. $x^2 + y^2 + 6x - 6 = 0$
- D. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1;1)$. Điểm nào sau đây là ảnh của M qua phép quay tâm O , góc quay 45° .

A. $(0;\sqrt{2})$

B. $(-1;1)$

C. $(1;0)$

D. $(\sqrt{2};0)$

Câu 10: Cho hình thoi $ABCD$ có góc A bằng 60° . Phép biến hình nào sau đây biến AB thành BC ?

A. ĐO

B. $T_{2\vec{OC}}$

C. $Q_{(D,60^\circ)}$

D. $Q_{(G,120^\circ)}$

4. Kết luận

Nội dung bài học sẽ giúp các em nắm được khái niệm, tính chất và các dạng bài tập liên quan đến Phép quay. Thông qua các ví dụ minh họa có hướng dẫn giải các em sẽ nắm được phương pháp làm bài, qua đó làm chủ nội dung bài học này.