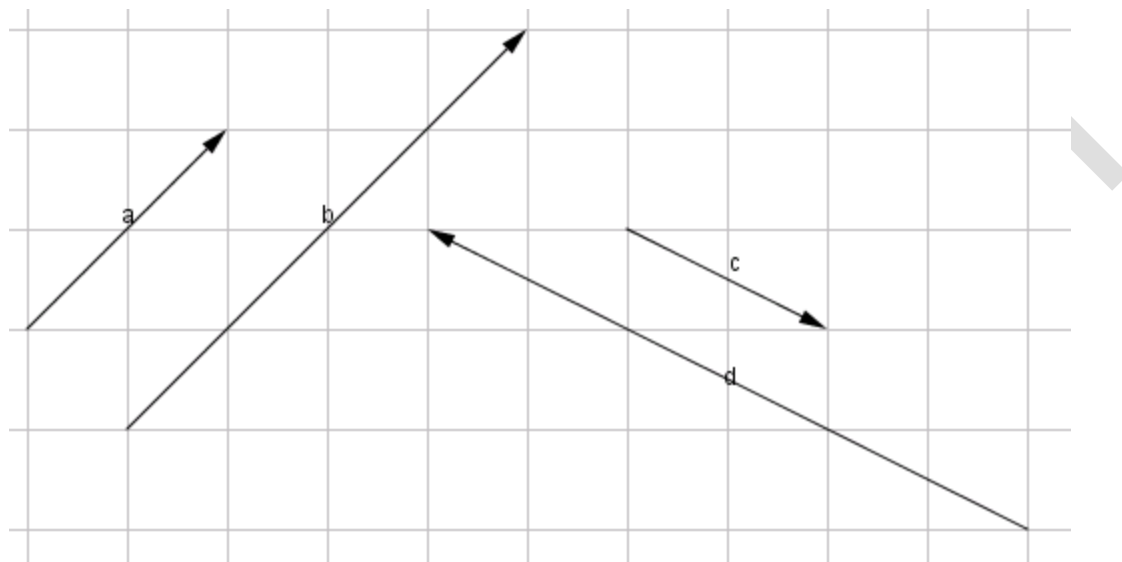


TÍCH CỦA VECTO' VỚI MỘT SỐ

1. Lý thuyết

1.1. Định nghĩa của một vectơ và một số

Xem hình vẽ minh họa và ta có các nhận xét sau:



Xét hai vectơ \vec{a} và \vec{b} ta nhận thấy rằng:

Chúng có giá song song với nhau và cùng hướng, độ lớn về chiều dài của \vec{b} gấp 2 lần độ lớn chiều dài của \vec{a}

Lúc đó, ta viết rằng: $\vec{b} = 2\vec{a}$

Xét đến hai vectơ \vec{c} và \vec{d} ta có nhận xét:

Chúng có giá song song và ngược hướng, độ lớn về chiều dài của \vec{d} gấp 3 lần độ lớn chiều dài của \vec{c}

Lúc đó, ta viết rằng: $\vec{d} = -3\vec{c}$

Định nghĩa:

Tích của vectơ \vec{a} với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ \vec{a} .

Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ \vec{a} .

Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

1.2. Các tính chất của phép nhân vectơ với số

Với hai vectơ bất kì \vec{a} , \vec{b} và mọi số thực k, l , ta có

$$1) k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a} ;$$

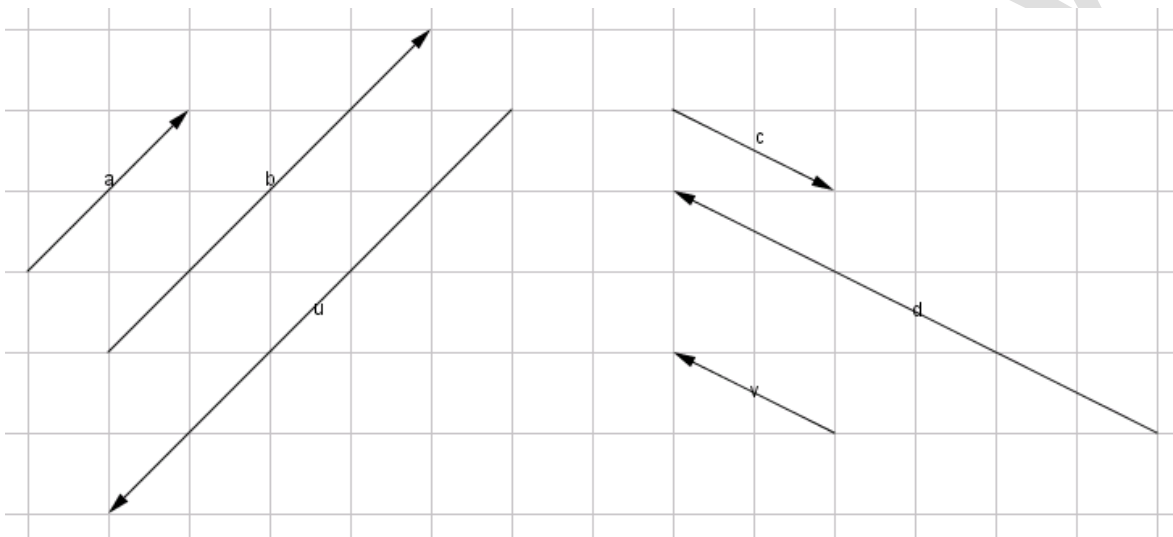
$$2) (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} ;$$

$$3) k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} ; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b} ;$$

$$4) k\vec{a} = \vec{0} \text{ khi và chỉ khi } k = 0 \text{ hoặc } \vec{a} = \vec{0}.$$

1.3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Chúng ta cùng xem qua hình ảnh sau:



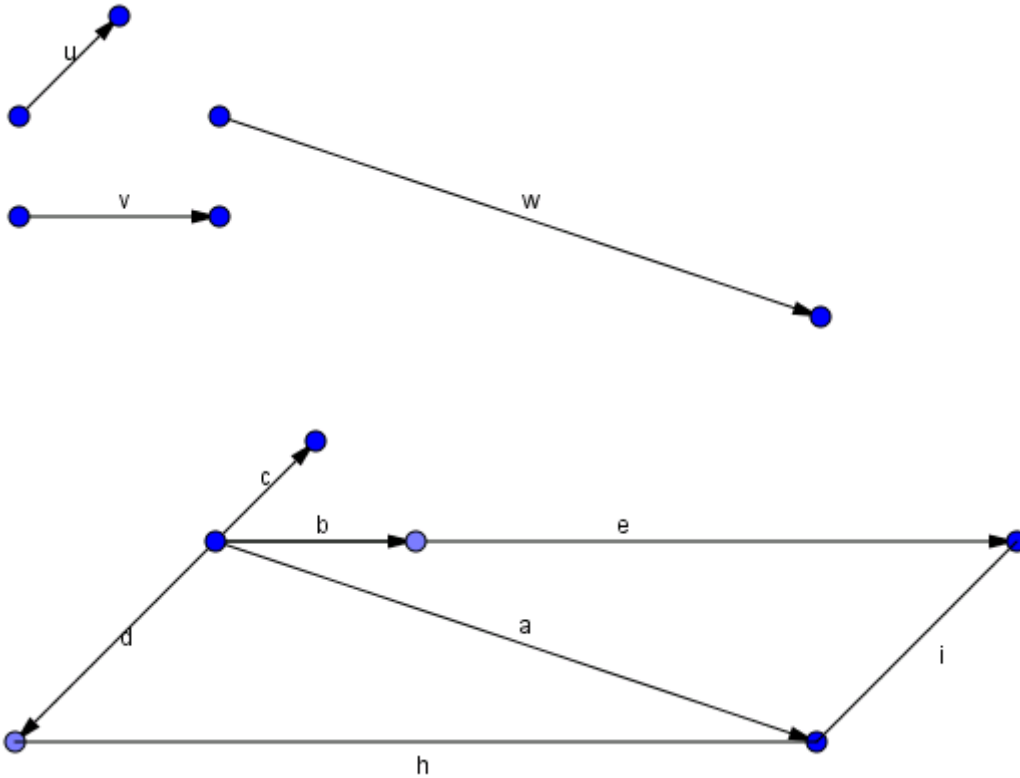
Một cách tổng quát, ta có:

Vectơ \vec{b} cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$

Ứng dụng vào ba điểm thẳng hàng:

Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

1.4. Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương



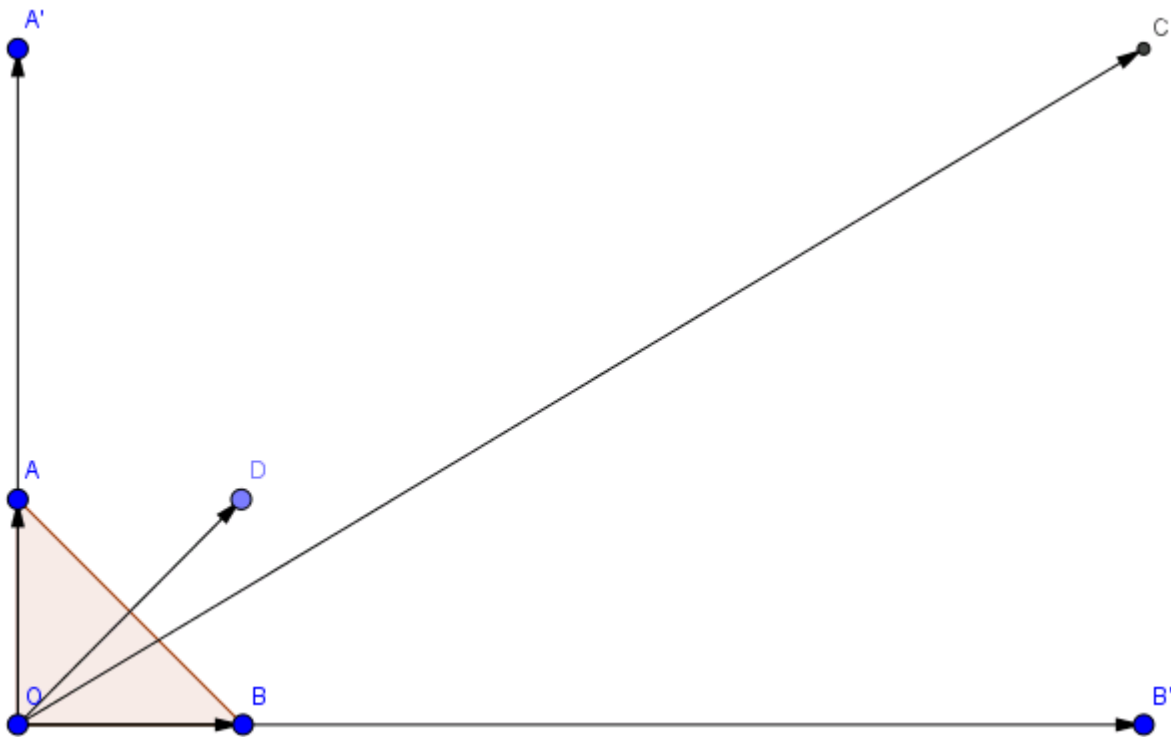
Dựa vào hình trên, ta có định lí sau:

Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khi đó mọi vectơ \vec{x} đều có thể hiển thị một cách duy nhất qua hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , nghĩa là có cặp số duy nhất m và n sao cho: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$

2. Bài tập minh họa

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân với $OA = OB = a$. Tính độ dài của các vectơ $\vec{OA} + \vec{OB}$; $3\vec{OA} + 4\vec{OB}$

Hướng dẫn giải:



Do tam giác OAB vuông cân tại O có cạnh là a . Dễ dàng tính được $\vec{OA} + \vec{OB}$ theo quy tắc hình bình hành, $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$

Độ lớn của $|\vec{OD}| = a\sqrt{2}$

Tương tự, ta tính $3\vec{OA} + 4\vec{OB}$

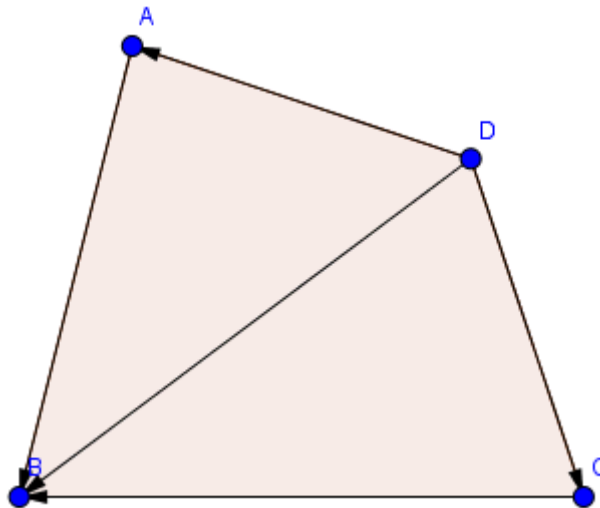
Nhận thấy rằng $3|\vec{OA}| = 3a; 4|\vec{OB}| = 4a$

Theo quy tắc hình bình hành và theo hình vẽ, ta có $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = \vec{OC}$

Độ lớn của $|\vec{OC}| = 5a$ theo định lý Pytago.

Câu 2: Chứng minh rằng với tứ giác ABCD bất kì, ta luôn có hệ thức: $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$

Hướng dẫn giải:

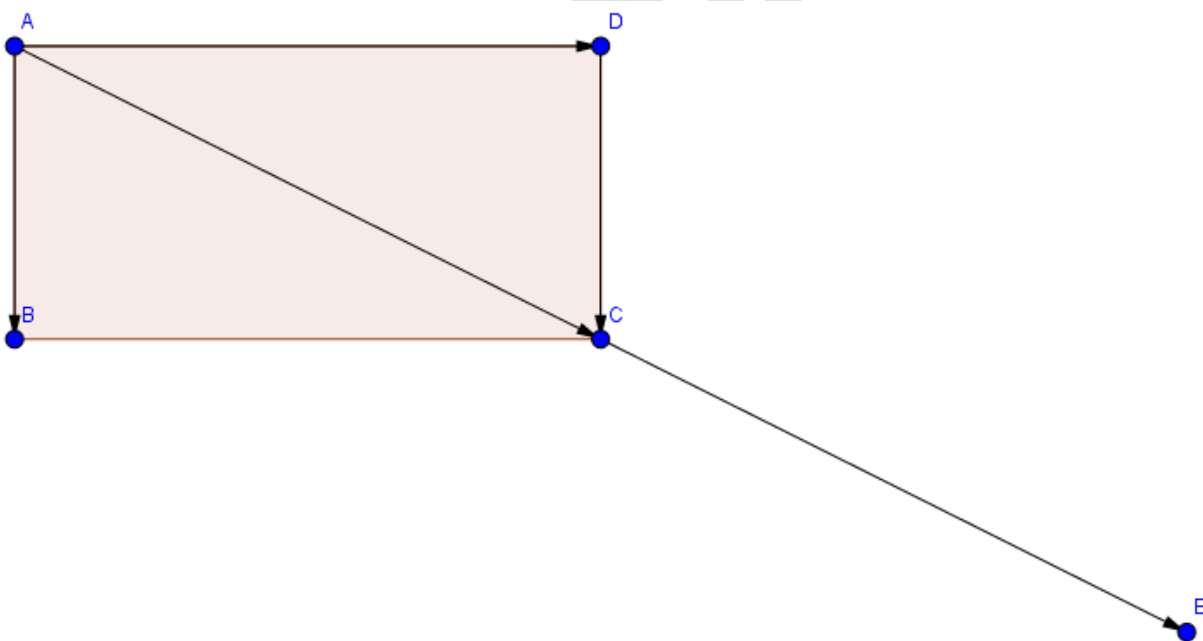


Đề yêu cầu cần chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

Ta viết lại: $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow dpcm$

Câu 3: Cho hình chữ nhật có $AB = 5cm$, $BC = 10cm$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

Hướng dẫn giải:



Như hình trên, chúng ta có thể viết lại như sau:

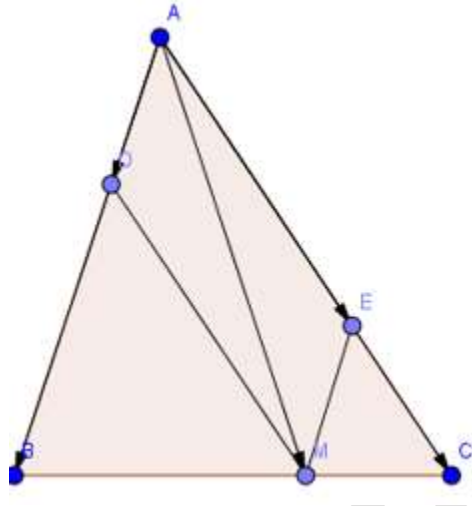
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AC}|$$

Bằng Py-ta-go, ta dễ dàng tính toán được $2|\overrightarrow{AC}| = 10\sqrt{5}(cm)$

Câu 4: Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải:



Theo giả thiết, $MB = 2MC$.

Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$, trên AC lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{3}AC$

Vậy, theo đề được viết lại như sau: $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

Cần chứng minh ADME là hình bình hành.

Thật vậy, với tỷ lệ đề cho, ta tìm được các cặp cạnh đối song song nhờ định lí Thales đảo.

Vậy: $\begin{cases} AD // ME \\ AE // DM \end{cases}$ hay ADME là hình bình hành

Nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. Luyện tập

3.1. Bài tập tự luận

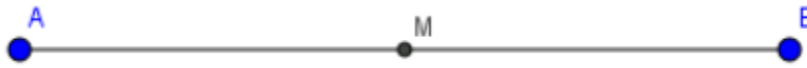
Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân với $OA = OB = a$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$; $3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$

Câu 2: Chứng minh rằng với tứ giác ABCD bất kì, ta luôn có hệ thức: $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho đoạn thẳng AB có trung điểm M. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

B. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$

C. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

D. Mọi điểm C thuộc đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

Câu 2: Tìm khẳng định sai:

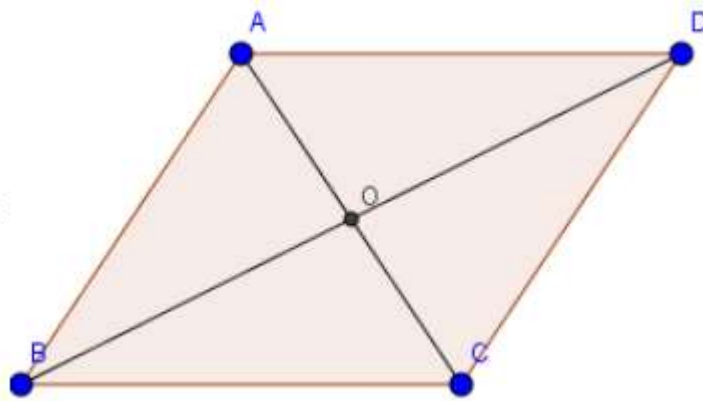
A. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương

B. Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương

C. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ đôi một cùng phương thì ít nhất có hai vectơ cùng phương

D. Để \vec{a} và \vec{b} bằng nhau thì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Câu 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Mệnh đề sai là?



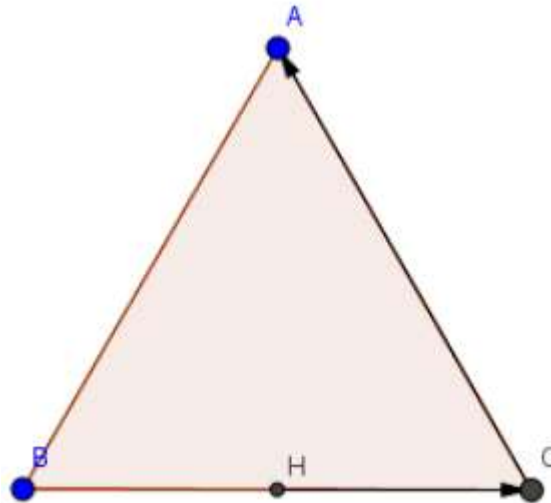
A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

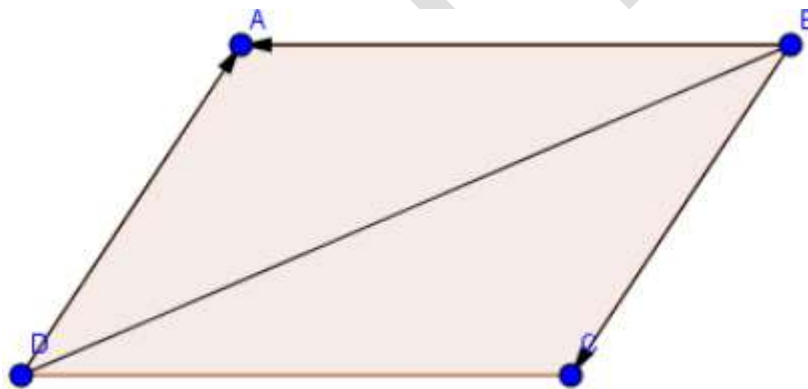
D. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$

Câu 4: Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Vectơ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}$ có độ dài là?



- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{3a}{2}$

Câu 5: Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$. Giá trị của $|\vec{BA} - \vec{DA}|$ là:



- A. 3cm B. 4cm C. 5cm D. 6cm

Câu 6: Cho vectơ \vec{a}, \vec{b} và các số thực m, n, k. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Từ đẳng thức $m\vec{a} = n\vec{b}$ suy ra $m = n$
- B. Từ đẳng thức $k\vec{a} = k\vec{b}$ luôn suy ra $\vec{a} = \vec{b}$
- C. Từ đẳng thức $k\vec{a} = k\vec{b}$ luôn suy ra $k = 0$
- D. Từ đẳng thức $m\vec{a} = n\vec{b}$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ suy ra $m = n$

Câu 7: Cho ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$. Biết rằng B nằm giữa A và C. Giá trị k thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A. $k < 0$ B. $k = 1$ C. $0 < k < 1$ D. $k > 1$

Câu 8: Cho ba ABC với các trung tuyến AM, BN, CP. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

Câu 9: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 10: Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Vị trí của điểm M trên d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3MG$ do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất là:

- A. Hình chiếu vuông góc của A trên d
 B. Hình chiếu vuông góc của B trên d
 C. Hình chiếu vuông góc của C trên d
 D. Hình chiếu vuông góc của G trên d, với G là trọng tâm tam giác ABC

Câu 11: Cho tứ giác ABCD; X là trọng tâm của tam giác BCD, G là trọng tâm tứ giác ABCD. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GX} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GX} = \vec{0}$ C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GX} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GX} = \vec{0}$

Câu 12: Tam giác ABC có trọng tâm G, độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c. Khi đó ABC là tam giác đều nếu có điều kiện nào sau đây?

- A. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ B. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} - c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
 C. $a\overrightarrow{GA} - b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ D. $-a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Câu 13: Các tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm lần lượt là G và G'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GG'}$ B. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GG'}$
 C. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Câu 14: Cho vector \vec{a} có $|\vec{a}| = 2$. Tìm số thực x sao cho vector $x\vec{a}$ có độ dài bằng 1 và cùng hướng với \vec{a}

A. $x = 1$

B. $x = 2$

C. $x = 1/2$

D. $x = -1/2$

Câu 15: Cho vector \vec{a} khác $\vec{0}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hai vector \vec{a} và $-\vec{2a}$ cùng phươngB. Hai vector \vec{a} và $-\vec{2a}$ cùng hướngC. Hai vector \vec{a} và $-\vec{2a}$ luôn có cùng gốcD. Hai vector \vec{a} và $-\vec{2a}$ luôn có giá song song với nhau

4. Kết luận

Bài học này giúp các em hiểu được tích của vector và một hằng số có phải là một vector.