

KHOA KIẾN
TRÚC- XÂY DỰNG

NGHIÊN CỨU KHOA HỌC KIẾN TRÚC XÂY DỰNG

XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ VẾT NỨT TRONG DẦM FGM BẰNG PHÂN
TÍCH WAVELET DỪNG CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/334197023>

Xác định vị trí vết nứt trong dầm fgm bằng phân tích wavelet dừng các dạng dao động riêng

Article in *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXD* · November 2018

DOI: 10.31814/stce.nuce.2018-12(7)-03

CITATIONS

0

READS

118

3 authors, including:



Ngo Trong Duc

DCCD

7 PUBLICATIONS 25 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Tran Van Lien

National University of Civil Engineering, Hanoi

19 PUBLICATIONS 286 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



PhD article [View project](#)

XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ VẾT NỨT TRONG DẦM FGM BẰNG PHÂN TÍCH WAVELET DỪNG CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Ngô Trọng Đức^a, Trần Văn Liên^{a,*}, Nguyễn Thị Hương^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 23/10/2018, Sửa xong 26/11/2018, Chấp nhận đăng 29/11/2018

Tóm tắt

Bài báo trình bày các kết quả nghiên cứu mới về việc xác định vết nứt trong các kết cấu hệ dầm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) dựa trên phân tích wavelet dừng (SWT) các dạng dao động riêng có kể đến ảnh hưởng của nhiễu trắng Gaussian. Các dạng dao động riêng được xác định từ mô hình phần tử thanh FGM chịu kéo, nén và uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo bằng phương pháp độ cứng động lực (DSM). Kết quả nghiên cứu cho thấy phương pháp đề xuất là một phương pháp khả thi và hiệu quả.

Từ khoá: vết nứt; FGM; DSM; SWT; dạng dao động riêng.

DETERMINATION OF CRACK LOCATION IN BEAM USING USING STATIONARY WAVELET TRANSFORM OF MODE SHAPES

Abstract

This paper proposed new crack identification method on multiple cracked beams made of functionally graded material (FGM) by using stationary wavelet transform (SWT) of measured mode shapes. This study also investigated the influence of Gaussian noise to SWT. Cracks were modelled as equivalent springs and mode shapes are obtained from multiple cracked FGM beam element model. The investigated results show that crack identification method by using SWT of mode shapes is efficient and realizable.

Keywords: crack; FGM; DSM; SWT; mode shapes.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12\(7\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12(7)-03) © 2018 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Tổng quan

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được làm từ hỗn hợp của gốm và kim loại, có khả năng chịu nhiệt, chống ăn mòn của gốm và độ bền cơ học cũng như làm giảm ứng suất nhiệt của kim loại. Đây là một loại vật liệu composite thể hệ mới, có tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật trong môi trường nhiệt độ cao như là hàng không vũ trụ, lò phản ứng hạt nhân, máy phát điện hay công nghiệp ô tô. Với các ưu điểm đó, vật liệu FGM được sử dụng cho các kết cấu, chi tiết quan trọng thường xuyên làm việc trong môi trường khắc nghiệt.

Vết nứt hay hư hỏng xuất hiện trong kết cấu FGM ảnh hưởng nghiêm trọng đến khả năng làm việc của cấu kiện. Do đó, vấn đề xác định vết nứt trong kết cấu FGM là thực sự cần thiết và đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Hầu hết các nghiên cứu hiện nay về xác định vị trí vết nứt trong kết cấu đều sử dụng phương pháp thí nghiệm không phá hủy dựa trên các đặc trưng động lực như là tần số, dạng dao động riêng, hàm phản ứng tần số,... Các đặc trưng động lực học của

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: lientv@nuce.edu.vn (Liên, T. V.)

dầm FGM có vết nứt được xác định bằng các phương pháp giải tích [1–6], phương pháp bán giải tích Galerkin [7], phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) [8–10], và phương pháp độ cứng động lực (DSM) [11–14].

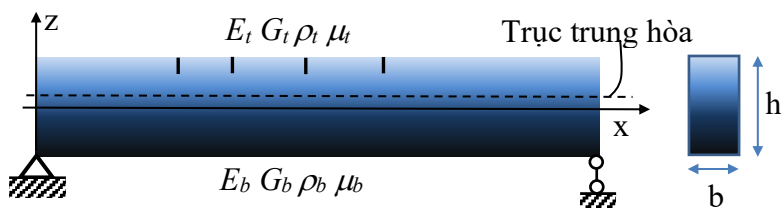
Trong số các phương pháp khác nhau sử dụng để xác định vị trí và số lượng vết nứt của kết cấu [15], phương pháp phân tích wavelet có hiệu quả lớn, đặc biệt là nhận dạng các hư hỏng, vết nứt nhỏ trong kết cấu. Liew và Wang [16] chứng minh rằng vị trí vết nứt trên dầm đơn giản có thể xác định được từ phân tích wavelet các ứng xử dao động riêng đo dọc theo dầm tại thời điểm nhất định. Nghiên cứu này tiếp tục được phát triển bởi Wang và Deng [17] cho trường hợp phản ứng xung của dầm và tẩm với các điều kiện biên khác nhau. Chang và Chen [18] đã đề xuất một phương pháp để xác định vị trí và độ sâu của dầm có nhiều vết nứt dựa trên phân tích không gian wavelet các dạng dao động riêng. Việc dự đoán độ sâu vết nứt được đơn giản hóa bằng cách sử dụng vị trí vết nứt dự đoán và các tần số dao động riêng. Zhong và Oyadiji [19] chứng minh rằng phân tích wavelet dừng (SWT) là công cụ hiệu quả cho việc chẩn đoán vết nứt chỉ dựa trên dạng riêng của kết cấu dầm. Hầu hết các nghiên cứu đã công bố đều sử dụng phân tích wavelet để chẩn đoán vết nứt trong kết cấu dạng dầm, những nghiên cứu về hệ kết cấu hệ thanh thường chỉ được thực hiện thông qua FEM.

Đối với vật liệu FGM, Banerjee và cộng sự [10] đã đưa ra hai phương pháp khác nhau để nhận dạng vết nứt trong dầm Timoshenko FGM. Ở phương pháp thứ nhất, các tác giả vẽ lên những đường đồng mức tần số dựa vào vị trí và kích thước vết nứt, và giao điểm của các đường đồng mức của từng dạng dao động là cơ sở để dự đoán vị trí cũng như chiều sâu vết nứt. Phương pháp thứ hai dựa trên mô hình mặt phản ứng (RSM) hồi quy được tối ưu hóa bằng thuật toán gen di truyền (GA). Tại Việt Nam, tác giả Khiêm và Huyền [20] đã đề xuất một phương pháp chẩn đoán 1 vết nứt trên dầm Timoshenko FGM dựa trên biểu thức giải tích của các tần số dao động riêng. Các phương pháp này đều có điểm chung là dựa trên các tần số dao động riêng đầu tiên, tuy nhiên trong thực tế việc xác định chính xác nhiều tần số dao động riêng là khó khăn, hơn nữa vết nứt tại một số vị trí trên dầm gần như không thay đổi một tần số dao động riêng nhất định, dẫn đến khó khăn trong việc sử dụng tần số để chẩn đoán vết nứt.

Nội dung chính của bài báo này là sử dụng phân tích SWT để chẩn đoán vết nứt trong các kết cấu dầm FGM như dầm đơn giản, dầm liên tục nhiều nhịp,... Đầu tiên, DSM được sử dụng để xây dựng mô hình của phần tử dầm có nhiều vết nứt, từ đó tính toán được chính xác các tần số và dạng dao động riêng của kết cấu dầm FGM có nhiều vết nứt. Tiếp theo, từ các dạng dao động riêng tìm được, tác giả đề xuất một phương pháp để chẩn đoán vị trí vết nứt trên kết cấu dầm FGM bằng cách sử dụng SWT trên tín hiệu đo các dạng dao động riêng. Ngoài ra nghiên cứu cũng đã xét đến ảnh hưởng của nhiều đo đạc đến hệ số chi tiết của phân tích wavelet.

2. Xác định dạng dao động riêng của dầm có nhiều vết nứt bằng DSM

2.1. Các hệ thức cơ bản



Hình 1. Dầm FGM có nhiều vết nứt

Xét dầm có chiều dài L , tiết diện chữ nhật với kích thước $A = b \times h$ được chế tạo từ vật liệu FGM (Hình 1) với hàm đặc trưng vật liệu có dạng lũy thừa [21]

$$\{R(z)\} = \{R_b\} + \{R_t - R_b\} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1)$$

trong đó R lần lượt là mô-đun đàn hồi E , mô-đun trượt G và mật độ khối lượng ρ ; chỉ số t và b ký hiệu vật liệu lớp trên và lớp dưới; z là tọa độ tính từ mặt giữa của dầm. Giả thiết biến dạng bé, các chuyển vị của dầm Timoshenko tại một điểm trên tiết diện có dạng

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - (z - h_0) \theta(x, t); \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (2)$$

trong đó $u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ là chuyển vị của điểm trên trục trung hòa; h_0 là khoảng cách từ trục trung hòa đến trục x ; θ là góc xoay của tiết diện quanh trục y . Cách xác định h_0 cũng như xét ảnh hưởng của vị trí trục đường trung hòa đến dao động của dầm FGM đã được trình bày trong [21]. Ký hiệu

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= \int_A E(z) (1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA; \quad A_{33} = \eta \int_A G(z) dA \\ (I_{11}, I_{12}, I_{22}) &= \int_A \rho(z) (1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA \end{aligned} \quad (3)$$

và các ma trận, véc-tơ

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{\Pi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & -A_{33} & 0 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \omega^2 I_{11} & -\omega^2 I_{12} & 0 \\ -\omega^2 I_{12} & \omega^2 I_{22} - A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 I_{11} \end{bmatrix} \\ \{\mathbf{z}\} &= \{U, \Theta, W\}^T = \int_{-\infty}^{\infty} \{u_0(x, t), \theta(x, t), w_0(x, t)\}^T e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \quad (4)$$

Trong miền tần số, phương trình dao động của dầm có dạng [21]

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{z}''\} + [\mathbf{\Pi}] \{\mathbf{z}'\} + [\mathbf{D}] \{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5)$$

trong đó $\{\mathbf{z}'\}$ là đạo hàm theo không gian của hàm z . Nghiệm tổng quát của phương trình (5) khi không có vế phải có thể viết dưới dạng

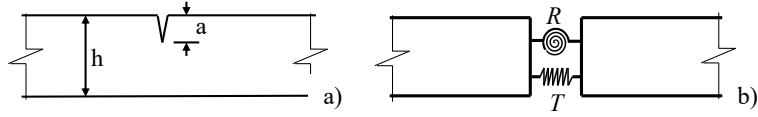
$$\{\mathbf{z}_0(x, \omega)\} = [\mathbf{G}(x, \omega)] \{\mathbf{C}\} \quad (6)$$

với $\{\mathbf{C}\} = (C_1, \dots, C_6)^T$ là các hằng số độc lập và

$$[\mathbf{G}(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{k_1 x} & \alpha_2 e^{k_2 x} & \alpha_3 e^{k_3 x} & \alpha_1 e^{-k_1 x} & \alpha_2 e^{-k_2 x} & \alpha_3 e^{-k_3 x} \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} & e^{-k_1 x} & e^{-k_2 x} & e^{-k_3 x} \\ \beta_1 e^{k_1 x} & \beta_2 e^{k_2 x} & \beta_3 e^{k_3 x} & -\beta_1 e^{-k_1 x} & -\beta_2 e^{-k_2 x} & -\beta_3 e^{-k_3 x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Đối với dầm có vết nứt tại tiết diện có tọa độ e , vết nứt được mô hình hóa bằng hai lò xo: lò xo dọc có độ cứng T và lò xo xoắn có độ cứng R (Hình 2). Điều kiện liên tục tại vị trí vết nứt là [21]

$$\begin{aligned} U(e+0) &= U(e-0) + \gamma_1 U'_x(e); \quad \Theta(e+0) = \Theta(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e); \quad W(e+0) = W(e-0) \\ U'_x(e+0) &= U'_x(e-0); \quad \Theta'_x(e+0) = \Theta'_x(e-0); \quad W'_x(e+0) = W'_x(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e) \end{aligned} \quad (8)$$



Hình 2. Dầm FGM với vết nứt mở và mô hình hai lò xo tương đương

Các tham số γ_1, γ_2 trong (8) là hàm của các tham số vật liệu như mô-đun đàn hồi, chiều cao dầm, hệ số nở ngang Poisson,... bao gồm cả trường hợp dầm đồng nhất $E_t = E_b = E_0$ hay $R_E = 1$

$$\gamma_1 = A_{11}/T = 2\pi(1 - \nu^2)h\sigma_1 f_1(s); \quad \gamma_2 = A_{22}/R = 6\pi(1 - \nu^2)h\sigma_2 f_2(s) \quad (9)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \sigma_1(R_E, n) &= \frac{2(R_E + n)}{(R_E + 1)(1 + n)}; \quad \sigma_2(R_E, n) = \frac{24}{R_E + 1} \left(\frac{3R_E + n}{3(3 + n)} - \frac{2R_E + n}{2 + n}\alpha + \frac{R_E + n}{1 + n}\alpha^2 \right); \quad R_E = \frac{E_t}{E_b} \\ f_1(s) &= s^2(0,6272 - 0,17248s + 5,92134s^2 - 10,7054s^3 + 31,5685s^4 - 67,47s^5 + \\ &+ 139,123s^6 - 146,682s^7 + 92,3552s^8) \\ f_2(s) &= s^2(0,6272 - 1,04533s + 4,5948s^2 - 9,9736s^3 + 20,2948s^4 - 33,0351s^5 + \\ &+ 47,1063s^6 - 40,7556s^7 + 19,6s^8) \end{aligned} \quad (10)$$

với $\alpha = 1/2 + h_0/h, s = a/h$ và a là chiều sâu vết nứt. Ký hiệu $\{z_c(x, \omega)\}$ là nghiệm riêng của (5) thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$\{z_c(0)\} = (\gamma_1 U'_x(e), \gamma_2 \Theta'_x(e), 0)^T; \quad \{z'_c(0)\} = (0, 0, \gamma_2 \Theta'_x(e))^T \quad (11)$$

và

$$\{z'_0(e)\} = (U'_0(e) \quad \Theta'_0(e) \quad W'_0(e))^T \quad (12)$$

Ta nhận được [21]

$$\{z_c(x)\} = [\Phi(x)] [\Sigma] \{z'_0(e)\} = [G_c(x)] \{z'_0(e)\} \quad (13)$$

trong đó $[G_c(x)]$ là ma trận 3×3

$$\begin{aligned} [G_c(x)] &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh k_1 x & \alpha_2 \cosh k_2 x & \alpha_3 \cosh k_3 x \\ \cosh k_1 x & \cosh k_2 x & \cosh k_3 x \\ \beta_1 \sinh k_1 x & \beta_2 \sinh k_2 x & \beta_3 \sinh k_3 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \delta_{11} &= (k_3 \beta_3 - k_2 \beta_2)/\Delta; \quad \delta_{12} = (\alpha_3 k_2 \beta_2 - \alpha_2 k_3 \beta_3)/\Delta; \quad \delta_{13} = (\alpha_2 - \alpha_3)/\Delta \\ \delta_{21} &= (k_1 \beta_1 - k_3 \beta_3)/\Delta; \quad \delta_{22} = (\alpha_1 k_3 \beta_3 - \alpha_3 k_1 \beta_1)/\Delta; \quad \delta_{23} = (\alpha_3 - \alpha_1)/\Delta \\ \delta_{31} &= (k_2 \beta_2 - k_1 \beta_1)/\Delta; \quad \delta_{32} = (\alpha_2 k_1 \beta_1 - \alpha_1 k_2 \beta_2)/\Delta; \quad \delta_{33} = (\alpha_1 - \alpha_2)/\Delta \\ \Delta &= k_1 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + k_2 \beta_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + k_3 \beta_3 (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (14)$$

Ta đưa vào ma trận hàm vết nứt

$$[\bar{G}(x)] = \begin{cases} [G_c(x)] & : x > 0 \\ [0] & : x \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Đối với dầm có nhiều vết nứt, ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình (5) dưới dạng

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = \{\mathbf{z}_0(x, \omega)\} + \sum_{j=1}^n [\overline{\mathbf{G}}(x - e_j)] \{\boldsymbol{\mu}_j\} \quad (16)$$

với $\{\boldsymbol{\mu}_j\}$ là véc-tơ 3×1

$$\{\boldsymbol{\mu}_j\} = \{\mathbf{z}'_0(e_j)\} + \sum_{k=1}^{j-1} [\overline{\mathbf{G}}'(e_j - e_k)] \{\boldsymbol{\mu}_k\}; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (17)$$

Thay biểu thức nghiệm tổng quát (6) vào (16), ta nhận được

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = \left([\mathbf{G}(x, \omega)] + \sum_{j=1}^n [\overline{\mathbf{G}}(x - e_j)] [\tilde{\chi}_j] \right) \{\mathbf{C}\} = [\boldsymbol{\Psi}(x, \omega)] \{\mathbf{C}\} \quad (18)$$

trong đó

$$[\boldsymbol{\Psi}(x, \omega)] = [\mathbf{G}(x, \omega)] + \sum_{j=1}^n [\overline{\mathbf{G}}(x - e_j)] [\tilde{\chi}_j] = [\mathbf{G}'(e_j)] + \sum_{k=1}^{j-1} [\overline{\mathbf{G}}'(e_j - e_k)] [\tilde{\chi}_k]; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (19)$$

Ký hiệu các tọa độ nứt, lực nứt của phần tử thanh chịu uốn và kéo, nén đồng thời như Hình 3

$$\{\hat{\mathbf{U}}_e\} = \{U_1, \Theta_1, W_1, U_2, \Theta_2, W_2\}^T; \quad \{\mathbf{P}_e\} = \{N_1, M_1, Q_1, N_2, M_2, Q_2\}^T \quad (20)$$

Ta nhận được [21]

$$\{\mathbf{P}_e(\omega)\} = [\hat{\mathbf{K}}_e(\omega)] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}_e\} \quad (21)$$

trong đó $[\hat{\mathbf{K}}_e]$ ma trận độ cứng động lực của phần tử dầm FGM có nhiều vết nứt

$$[\hat{\mathbf{K}}_e] = \begin{bmatrix} [-\mathbf{B}_F(\mathbf{Y})_{x=0}] \\ [\mathbf{B}_F(\boldsymbol{\Psi})_{x=L}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Psi}(0, \omega)] \\ [\boldsymbol{\Psi}(L, \omega)] \end{bmatrix}^{-1} \quad (22)$$

với $[\mathbf{B}_F]$ là toán tử ma trận

$$[\mathbf{B}_F] = \begin{bmatrix} A_{11}\partial_x & -A_{12}\partial_x & 0 \\ -A_{12}\partial_x & A_{22}\partial_x & 0 \\ 0 & -A_{33} & A_{33}\partial_x \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sau đó, việc lắp ghép ma trận độ cứng động lực và véc-tơ tải trọng quy về nứt của phần tử vào ma trận độ cứng động lực và véc-tơ tải trọng quy về nứt của cả kết cấu được thực hiện không khác gì phương pháp phần tử hữu hạn. Bài toán dao động riêng là giải các phương trình sau

$$[\hat{\mathbf{K}}(\omega)]\{\hat{\mathbf{U}}\} = \{0\} \quad (24)$$

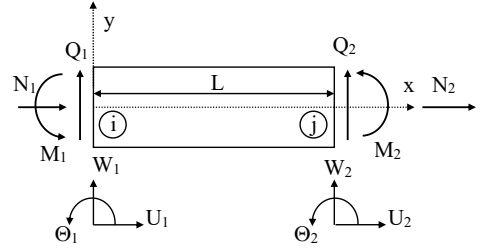
Với tần số dao động riêng $\{\omega\} = \{\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n\}$ có được từ phương trình

$$\det [\hat{\mathbf{K}}(\omega)] = 0 \quad (25)$$

Mỗi nghiệm ω_j của phương trình là tần số dao động riêng của kết cấu ứng với dạng dao động riêng

$$\{\phi_j(x)\} = C_j^0 [\boldsymbol{\Psi}(x, \omega_j)] \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Psi}(0, \omega)] \\ [\boldsymbol{\Psi}(L, \omega)] \end{bmatrix}^{-1} \{\hat{\mathbf{U}}_j\} \quad (26)$$

trong đó C_j^0 là hằng số bất kỳ, $\{\hat{\mathbf{U}}_j\}$ là nghiệm chuẩn hóa của (24) ứng với ω_j .



Hình 3. Thanh chịu uốn và kéo, nén đồng thời

3. Phân tích wavelet và SWT

Phân tích wavelet bắt đầu bằng việc chọn một hàm wavelet cơ bản $\psi(x)$ (gọi là wavelet mẹ). Phân tích wavelet liên tục (CWT) được định nghĩa là [21]

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx \quad (27)$$

trong đó $a > 0$ là tỷ lệ và b tham số dịch mức; $\psi_{a,b}(x)$ là hàm số

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (28)$$

Kết quả CWT là hệ số wavelet $C(a, b)$ thể hiện sự tương quan giữa hàm số wavelet và tín hiệu phân tích $f(x)$. Vì thế, các thay đổi đột ngột trong $f(x)$ sẽ tạo ra các hệ số wavelet có biên độ lớn, đây là đặc điểm để xây dựng phương pháp nhận dạng vết nứt dựa trên phân tích wavelet của tín hiệu. Tín hiệu ban đầu $f(x)$ có thể được tái tạo từ các hệ số wavelet $C(a, b)$

$$f(x) = \frac{1}{K_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{db da}{a^2} \quad (29)$$

trong đó hằng số K_ψ phụ thuộc vào loại wavelet. Giả thiết rằng hệ số wavelet $C(a, b)$ chỉ có giá trị đối với tỷ lệ $a < a_0$, dành riêng cho các thành phần tần số cao trong tín hiệu, với $a > a_0$, được xem như nhiễu. Trong trường hợp này, tín hiệu tái tạo cần phần bù của tín hiệu tương ứng với $a > a_0$. Để thực hiện việc này, người ta đưa vào một hàm $\phi(x)$ khác gọi là “hàm tỷ lệ”, thu được các hệ số wavelet

$$D(a_0, b) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi\left(\frac{x-b}{a_0}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{a_0,b}(x) dx \quad (30)$$

Hàm tỷ lệ rất cần thiết cho tính toán bằng số. Thay vì (29), tín hiệu ban đầu $f(x)$ có thể tái tạo từ

$$f(x) = \frac{1}{K_\psi} \int_{a=0}^{a_0} \int_{b=-\infty}^{\infty} C(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{db da}{a^2} + \frac{1}{K_\psi a_0} \int_{b=-\infty}^{\infty} D(a_0, b) \phi_{a_0,b}(x) db \quad (31)$$

Một nhược điểm của CWT là quá trình phân tích sẽ cho số lượng rất lớn các hệ số wavelet $C(a, b)$. Để giảm khối lượng tính toán, phân tích wavelet rời rạc (DWT) sử dụng tỷ lệ rời rạc và tham số dịch mức dưới dạng cặp số: $a = 2^j$; $b = k2^j$ trong đó j và k là các số nguyên, j là mức dyadic. Phân tích wavelet rời rạc DWT như sau

$$C_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(2^{-j}x - k\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (32)$$

trong đó $\psi_{j,k}(x)$ là hàm wavelet rời rạc

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi\left(2^{-j}x - k\right) \quad (33)$$

Thay cho (29), tín hiệu trong DWT có thể tái tạo từ hệ số wavelet $C_{j,k}$

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (34)$$

Tín hiệu sẽ đi qua rất nhiều bộ lọc (gồm có bộ lọc cao và bộ lọc thấp) để tách lấy các thành phần tần số cao và tần số thấp tương ứng. Thay cho (31), tín hiệu trong DWT có thể được biểu diễn bằng hàm xấp xỉ và chi tiết như sau

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^J \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k) \psi_{j,k}(x) \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_J(k) \phi_{j,k}(x) = \sum_{j \leq J} D_j(x) + A_j(x) \quad (35)$$

với $A_j(x)$ là hàm xấp xỉ ở mức J ; $D_i(x)$ và chi tiết ở mức $j \leq J$

$$D_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k) \psi_{j,k}(x); \quad A_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_J(k) \phi_{j,k}(x) \quad (36)$$

cD_j và cA_j theo thứ tự là hệ số chi tiết và hệ số xấp xỉ

$$cD_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx; \quad cA_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{j,k}(x) dx \quad (37)$$

Dưới đây, các tác giả quan tâm nhiều tới các tín hiệu chi tiết. Nếu $f(x)$ là tín hiệu ứng xử kết cấu như đường độ võng, thì tín hiệu $D_j(x)$ chứa thông tin cần thiết để phát hiện vết nứt.

Tuy nhiên DWT cổ điển có nhược điểm là nó không phải là biến đổi bất biến theo thời gian. Điều này có nghĩa là, ngay cả với tín hiệu tuần hoàn, DWT của một phiên bản đã dịch của tín hiệu gốc $f(x)$ về cơ bản không phải là bản dịch của DWT của tín hiệu gốc $f(x)$. Để khắc phục vấn đề này, ta có thể sử dụng đến phân dư phân tích của tín hiệu [19]

$$\tilde{D}_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-k}{2^j}\right) dx; \quad \tilde{A}_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi\left(\frac{x-k}{2^j}\right) dx \quad (38)$$

Hệ số xấp xỉ và chi tiết xác định theo (37) được gọi là phân tích *wavelet dừng* (SWT). Cần phải chú ý rằng SWT của dữ liệu gốc không bị tiêu hao nhiều. Có nghĩa là, kích thước của dãy số liệu biến đổi sau SWT không bị cắt đi một phần nào cả. Ngược lại, trong DWT, kích thước dãy dữ liệu sau biến đổi chỉ bằng một nửa so với kích thước tín hiệu gốc. Do đó, DWT là quá trình phân giải tín hiệu mà kết quả cho ra nghèo nàn hơn tín hiệu gốc. Trong khi đó, SWT là quá trình tách tín hiệu kết quả nhiều hơn tín hiệu gốc. Do đó, hệ số chi tiết từ phân tích DWT có ít thông tin hơn so với phân tích SWT. Bởi vậy, SWT có tiềm năng rất lớn với sự thuận lợi trong tách và nhận dạng các điểm nổi bật trong tín hiệu và xác định hư hỏng kết cấu.

3.1. Nhiễu đo đạc và nhiễu nhiễu

Thực tế, dữ liệu dạng dao động riêng của kết cấu có vết nứt gồm 3 phần [19]

$$y = y_{\text{intact}} + y_{\text{noise}} + y_{\text{crack}} \quad (39)$$

trong đó y là dạng dao động riêng đo lường được; y_{intact} là dạng dao động riêng của kết cấu không có vết nứt và không có nhiễu; y_{noise} là thành phần nhiễu có mặt cả trong trường hợp kết cấu có nứt và không có nứt mà ta không biết được giá trị đúng hay không đo lường được; y_{crack} là thành phần tín hiệu xuất hiện thêm vào khi có vết nứt và chỉ tồn tại khi kết cấu có vết nứt.

Về mặt lý thuyết, dữ liệu dạng dao động có thể phân tích bởi SWT thành hai thành phần: Thành phần thứ nhất là hệ số xấp xỉ có chứa y_{intact} , đây là một đường cong trơn; Thành phần thứ hai là hệ số chi tiết gồm y_{noise} và y_{crack} và lưu ý rằng thành phần nhiễu bao gồm của cả hai thành phần kết cấu không nứt và kết cấu có nứt đều được phân tách vào hệ số chi tiết. Hệ số chi tiết có thể cung cấp các thông tin nhận biết sự tồn tại của vết nứt. Để thuận lợi cho nhận dạng được vết nứt thì việc lựa chọn phương pháp giảm thiểu nhiễu hay khử nhiễu cho tín hiệu của kết cấu không có nứt hoặc có nứt là rất cần thiết. Thông thường, quy trình khử nhiễu trong phân tích wavelet được thực hiện thông qua đặt ngưỡng (*thresholding*) định sẵn. Có hai ngưỡng hay sử dụng là *hard-thresholding* (ngưỡng cứng) và *soft-thresholding* (ngưỡng mềm). Hàm *hard-thresholding* được định nghĩa là

$$\eta_{th} = \begin{cases} x & |x| > th \\ 0 & |x| < th \end{cases} \quad \text{trong đó } th \text{ là ngưỡng} \quad (40)$$

Hàm ngưỡng mềm *soft-thresholding* được định nghĩa là

$$\eta_{th} = \text{sgn}(x) \max(|x| - th, 0) \quad (41)$$

Hàm *soft-thresholding* được sử dụng nhiều hơn trong việc khử nhiễu. Đối với các hàm ngưỡng thì mức ngưỡng th được tính toán theo công thức

$$th = \sigma \sqrt{2 \log N} \quad (42)$$

trong đó N là chiều dài tín hiệu, σ là độ lệch chuẩn của nhiễu. Trong cả hai trường hợp kết cấu có vết nứt và kết cấu không có vết nứt, nhiễu có trong cả tần số số cao và tần số thấp. Đối với kết cấu có vết nứt, nhiễu sẽ tác động thêm vào tín hiệu trong hệ số chi tiết phát sinh khi có vết nứt. Như vậy trong nhận dạng vết nứt của kết cấu, những tác động của mức nhiễu vào tần số thấp sẽ được bỏ qua coi như nó đã có trong hệ số xấp xỉ là kết quả của phân tích wavelet, và không ảnh hưởng đến việc nhận dạng vết nứt theo hệ số chi tiết.

Để mô phỏng các số liệu đo thực nghiệm, ta sử dụng nhiễu trắng Gaussian được cộng thêm vào dạng dao động của kết cấu [21]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (43)$$

Thông thường đường cong Gaussian phụ thuộc vào giá trị kỳ vọng μ và phương sai σ^2 , hoặc được đánh giá theo trị số SNR (*Signal to Noise Ratio*)

$$SNR = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{norm}(\text{Signal})}{\text{norm}(\text{Noise})} \right) \quad (\text{dB}) \quad (44)$$

trong đó *norm* là chuẩn đo của tín hiệu $f(x)$ có độ dài N_s

$$\text{norm}(f) = \left(\sum_{i=1}^{N_s} |f(x_i)|^2 \right)^{1/2} \quad (45)$$

với N_s là số điểm rời rạc của mẫu tín hiệu $f(x)$. Chỉ số SNR cao tương ứng với sự hiện diện của nhiễu nhỏ và ngược lại. Như vậy, véc-tơ tín hiệu nhiễu có dạng:

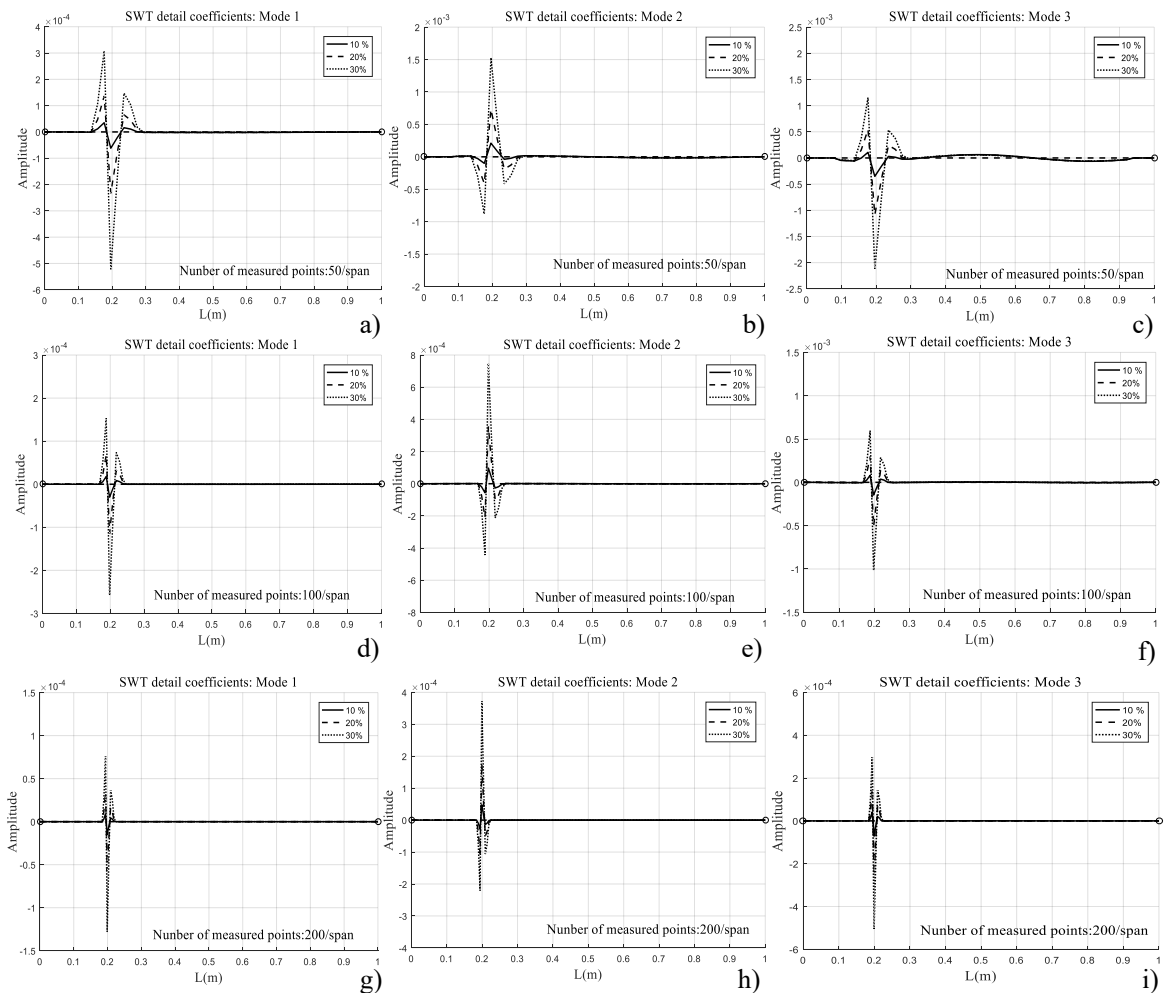
$$y_{\text{noise}} = \frac{y_{nr}}{\text{norm}(y_{nr})} \frac{\text{norm}(y_{\text{intact}})}{10^{(0.05 \times \text{SNR})}} \quad (46)$$

với $y_{nr} = \text{Rand}(\text{size}(y_{\text{intact}, \text{std}}))$ là véc-tơ các giá trị giả lập ngẫu nhiên phân bố đều trên đoạn (0, 1), có chiều dài tương ứng với chiều dài tín hiệu gốc.

4. Kết quả số, nhận xét và đánh giá

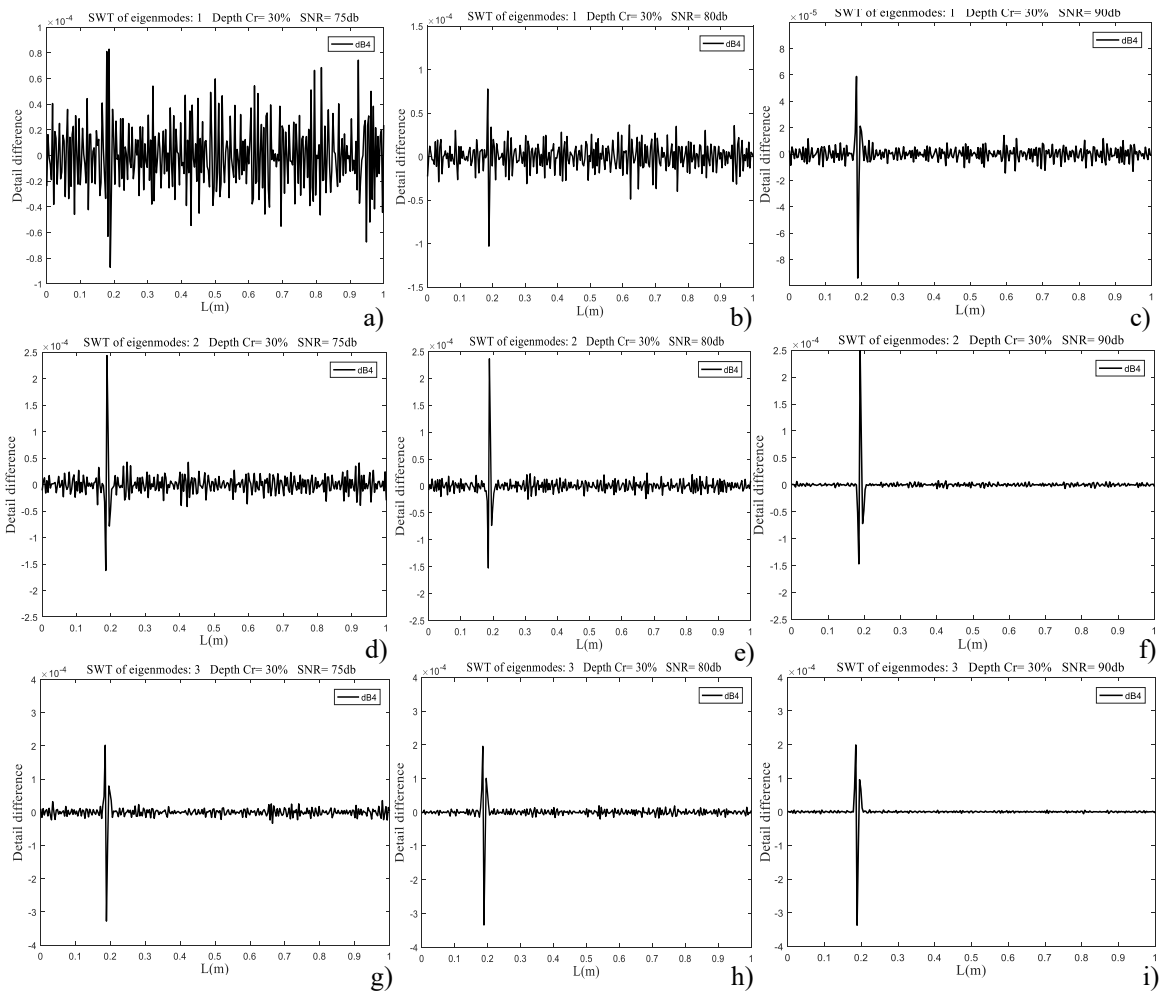
4.1. Dầm đơn giản

Xét dầm FGM Timoshenko hai đầu gối tựa cố định với các tham số: $E_t = 70 \text{ GPa}$; $\rho_t = 2780 \text{ kg/m}^3$; $\mu_t = 0,33$; $E_t/E_b = 2$; $\rho_b = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\mu_b = 0,33$; $n = 0,5$ và kích thước: $L = 1,0 \text{ m}$; $b = 0,1 \text{ m}$; $h = 0,1 \text{ m}$.



Hình 4. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m; độ sâu vết nứt 10%; 20%; 30% với số điểm đo là 50(a-c); 100(d-e) và 200 điểm(g-i)

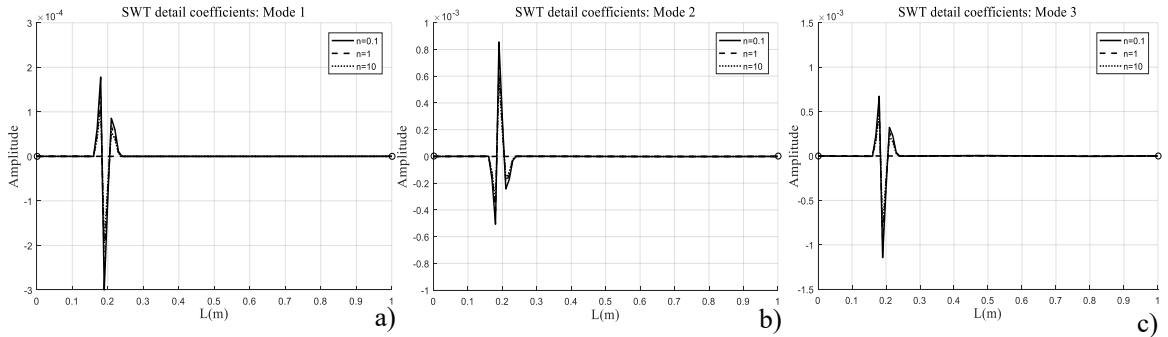
Hình 4 là biểu đồ hệ số chi tiết của SWT loại *db4* cho 3 dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết nứt tại $x_1 = 0,2\text{m}$ tính từ nút bên trái với độ sâu vết nứt là 10%, 20% và 30% ứng với số điểm đo là 50 điểm (Hình 4(a)–(c)), 100 điểm (Hình 4(d)–(f)), 200 điểm (Hình 4(g)–(i)). Trong các tính toán dưới đây, ta đều chọn số điểm đo là 100 điểm. Tín hiệu đầu vào là 3 dạng dao động riêng đầu tiên của dầm FGM có vết nứt được cộng thêm nhiễu với các mức nhiễu SNR khác nhau. Hình 5 thể hiện hệ số chi tiết đối với phân tích SWT cho dạng dao động riêng thứ nhất (Hình 5(a)–(c)), thứ hai (Hình 5(d)–(f)) và thứ ba (Hình 5(g)–(i)) của dầm đơn giản FGM với mức nhiễu là 75, 80 và 90 dB. Ta nhận thấy dạng dao động riêng càng cao thì ảnh hưởng của nhiễu càng giảm dần. Để có thể nhận dạng được vị trí vết nứt, mức nhiễu của dạng dao động riêng đầu tiên phải lớn hơn 80 dB, trong khi đó với dạng dao động thứ hai, giá trị này chỉ là 75 dB. Dưới đây, để đơn giản ta giả thiết không có nhiễu trong các dạng dao động riêng. Hình 6 là biểu đồ hệ số chi tiết của SWT loại *db4* cho 3 dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết nứt $x_1 = 0,2\text{ m}$ tính từ nút bên trái với độ sâu là 30% khi số mũ n thay đổi lần lượt là $n = 0,1; 1; 10$.



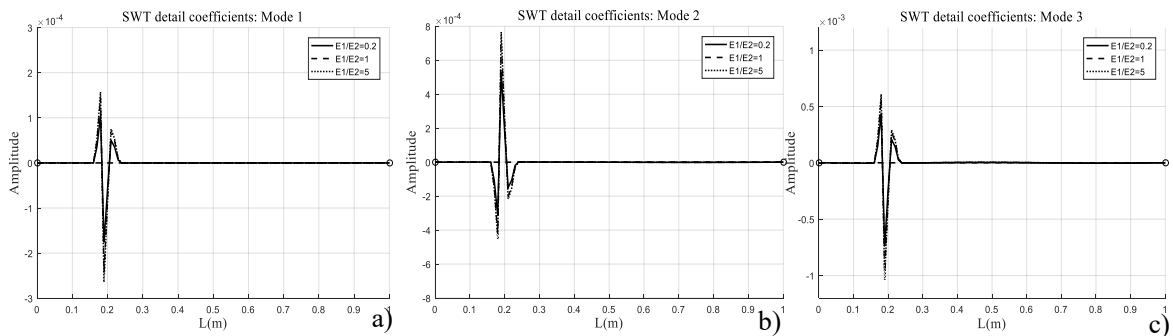
Hình 5. Hệ số chi tiết SWT đối với dạng dao động riêng thứ nhất (a-c), thứ hai (d-f) và thứ ba (g-i) của dầm FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0, 2 m từ nút trái với độ sâu 30% và mức nhiễu 75, 80 và 90 dB

Hình 7 là biểu đồ hệ số chi tiết của SWT loại *db4* cho 3 dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết

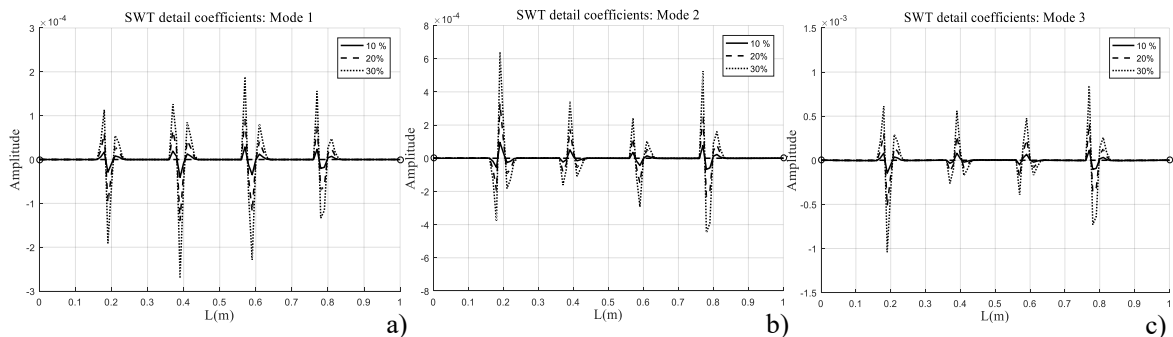
nút $x_1 = 0,2$ m tính từ nút bên trái với độ sâu là 30% khi tỷ số E_t/E_b thay đổi lần lượt là 0,5; 1; 5. Hình 8 là biểu đồ hệ số chi tiết của SWT loại db4 cho 3 dạng dao động đầu tiên của dầm có 4 vết nứt cách đều nhau một khoảng 0,2 m với độ sâu vết nứt đều thay đổi là 10%, 20% và 30%. Số điểm đo trong các Hình 5–7 đều là 100 điểm.



Hình 6. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm đơn giản FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m, độ sâu vết nứt 30% và số mũ thay đổi lần lượt là $n = 0,1; 1; 10$



Hình 7. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm đơn giản FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m, độ sâu vết nứt 30% và tỷ số E_t/E_b thay đổi lần lượt là 0,5; 1; 5



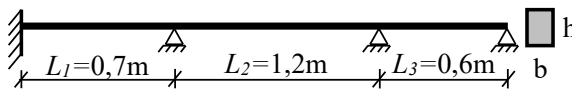
Hình 8. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm đơn giản FGM có 4 vết nứt phân bố đều trên dầm và độ sâu vết nứt đều thay đổi là 10%, 20%, 30%

Ta nhận thấy:

- Biểu đồ hệ số chi tiết của các dạng dao động khác nhau đều có điểm gián đoạn tại vị trí vết nứt.
- Giá trị đỉnh của các biểu đồ tăng lên khi chiều sâu vết nứt tăng lên, nghĩa là vết nứt lớn thì biểu đồ hệ số chi tiết càng rõ nét.
- Đối với các vết nứt có độ sâu như nhau nhưng tại các vị trí khác nhau thì biên độ đỉnh cũng khác nhau, biên độ đỉnh lớn ứng với vị trí vết nứt làm thay đổi lớn dạng dao động. Như vậy, biên độ đỉnh phụ thuộc không những vào vị trí vết nứt mà còn phụ thuộc độ sâu vết nứt.
- Khi tăng số lượng điểm lấy mẫu thì ảnh hưởng của chiều sâu vết nứt đến dạng gián đoạn của biểu đồ hệ số chi tiết vẫn ổn định, đồng thời giá trị tuyệt đối của biên độ tăng lên đáng kể và vùng xảy ra sự gián đoạn cũng thu hẹp lại.
- Khi số mũ n càng nhỏ hoặc tỷ số E_t/E_b càng lớn thì dầm nhạy cảm hơn với vết nứt, biểu đồ hệ số chi tiết có bước nhảy lớn.

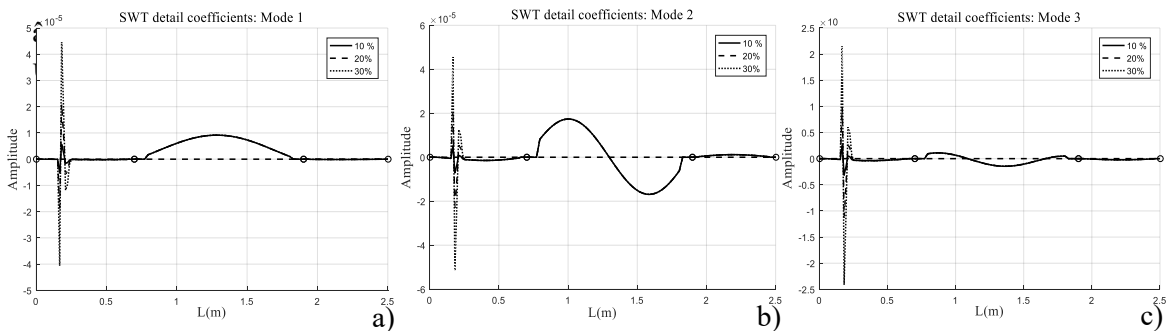
4.2. Dầm liên tục nhiều nhịp

Xét dầm liên tục FGM với các tham số vật liệu như sau: $E_t = 70 \text{ GPa}$; $\rho_t = 2780 \text{ kg/m}^3$; $\mu_t = 0,33$; $E_t/E_b = 2$; $\rho_b = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\mu_b = 0,33$ và số mũ đặc trưng vật liệu $n = 0,5$. Kích thước tiết diện: $b = 0,1\text{m}$, $h = 0,1\text{m}$ (Hình 9).



Hình 9. Dầm liên tục có vết nứt

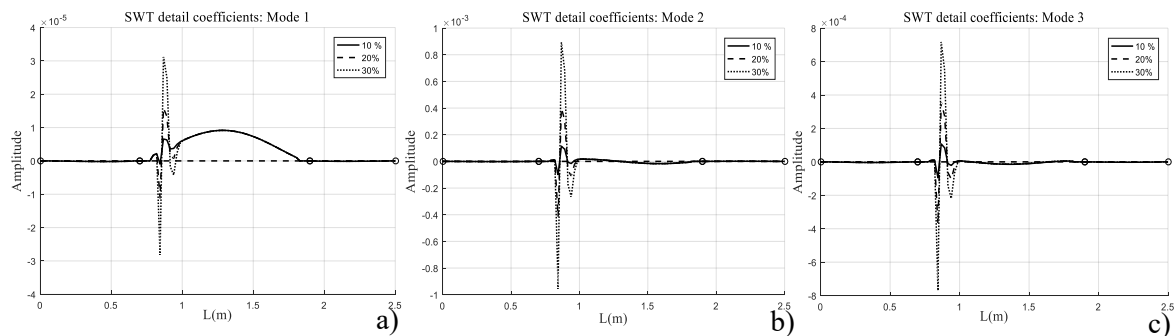
Hình 10 là biểu đồ hệ số chi tiết wavelet ba dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết nứt, vị trí vết nứt là $x_1 = 0,2 \text{ m}$, tính từ nút đầu tiên bên trái (trên nhịp dầm đầu tiên), chiều sâu vết nứt thay đổi lần lượt là 10%, 20%, 30%. Hình 11 là biểu đồ hệ số chi tiết wavelet ba dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết nứt, vị trí vết nứt là $x_1 = 0,2 \text{ m}$, tính từ nút thứ hai bên trái (trên nhịp dầm thứ 2), chiều sâu vết nứt thay đổi lần lượt là 10%, 20%, 30%. Hình 12 là biểu đồ hệ số chi tiết wavelet ba dạng dao động đầu tiên của dầm có 1 vết nứt, vị trí vết nứt là $x_1 = 0,2 \text{ m}$, tính từ nút thứ ba (trên nhịp dầm thứ 3), chiều sâu vết nứt thay đổi lần lượt là 10%, 20%, 30%.



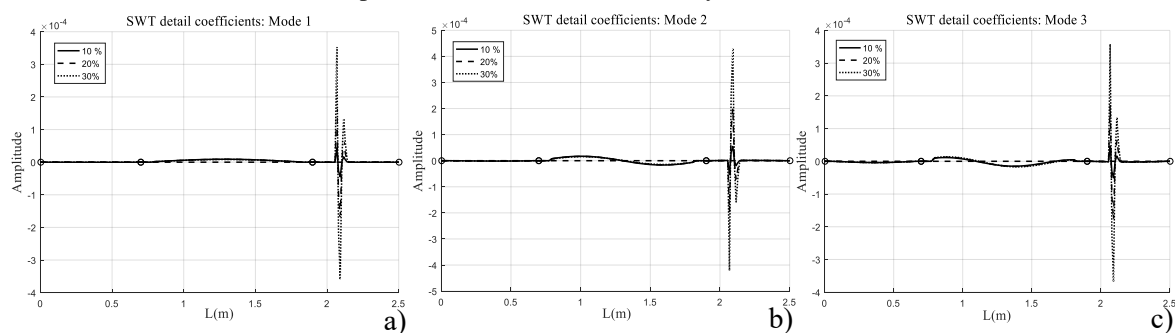
Hình 10. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m trên nhịp dầm đầu tiên, độ sâu vết nứt thay đổi $a/h = 10\%, 20\%, 30\%$

Ta nhận thấy:

- Tương tự với trường hợp dầm đơn giản, các biểu đồ hệ số chi tiết đều có điểm gián đoạn tại vị trí vết nứt.



Hình 11. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m trên nhịp dầm thứ hai, độ sâu vết nứt thay đổi $a/h = 10\%, 20\%, 30\%$



Hình 12. Hệ số chi tiết SWT đối với ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục FGM có 1 vết nứt ở vị trí 0,2 m trên nhịp dầm thứ ba, độ sâu vết nứt thay đổi $a/h = 10\%, 20\%, 30\%$

- Giá trị đỉnh của các biểu đồ tăng lên khi chiều sâu vết nứt tăng lên, nghĩa là vết nứt lớn thì biểu đồ hệ số chi tiết càng rõ nét.

- Đối với các vết nứt có độ sâu như nhau nhưng tại các vị trí khác nhau, trên các nhịp dầm khác nhau thì biên độ đỉnh cũng khác nhau, biên độ đỉnh lớn ứng với vị trí vết nứt làm thay đổi lớn dạng dao động. Như vậy, biên độ đỉnh phụ thuộc không những vào vị trí vết nứt mà còn phụ thuộc độ sâu vết nứt.

5. Kết luận

Trong bài báo này, các tác giả đã trình bày các kết quả nghiên cứu mới về việc xác định vết nứt trong dầm FGM (dầm đơn giản, dầm liên tục nhiều nhịp) có nhiều vết nứt dựa trên phân tích SWT đối với các dạng dao động riêng có kể đến ảnh hưởng của nhiễu trắng Gaussian. Tần số và các dạng dao động riêng được xác định từ mô hình phần tử thanh đàn hồi chịu kéo, nén và uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo bằng phương pháp độ cứng động lực. Kết quả nghiên cứu cho thấy phương pháp này có tính khả thi, hiệu quả và có thể áp dụng vào thực tế.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia (NAFOSTED) cho đề tài mã số 107.02-2017.301.

Tài liệu tham khảo

- [1] Ke, L. L., Yang, J., Kitipornchai, S., Xiang, Y. (2009). [Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16(6):488–502.
- [2] Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y., Jia, X. L. (2008). [Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load](#). *Journal of Sound and Vibration*, 312(1-2):166–181.
- [3] Aydin, K. (2013). [Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks](#). *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42:112–124.
- [4] Yang, J., Chen, Y. (2008). [Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks](#). *Composite Structures*, 83(1):48–60.
- [5] Wei, D., Liu, Y., Xiang, Z. (2012). [An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks](#). *Journal of Sound and Vibration*, 331(7):1686–1700.
- [6] Sherafatnia, K., Farrahi, G., Faghidian, S. A. (2013). [Analytic approach to free vibration and buckling analysis of functionally graded beams with edge cracks using four engineering beam theories](#). *International Journal of Engineering-Transactions C: Aspects*, 27(6):979–990.
- [7] Kitipornchai, S., Ke, L. L., Yang, J., Xiang, Y. (2009). [Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams](#). *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5):962–982.
- [8] Yu, Z., Chu, F. (2009). [Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method](#). *Journal of Sound and Vibration*, 325(1-2):69–84.
- [9] Akbaş, Ş. D. (2013). [Free vibration characteristics of edge cracked functionally graded beams by using finite element method](#). *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 4(10):4590–4597.
- [10] Banerjee, A., Panigrahi, B., Pohit, G. (2016). [Crack modelling and detection in Timoshenko FGM beam under transverse vibration using frequency contour and response surface model with GA](#). *Nondestructive Testing and Evaluation*, 31(2):142–164.
- [11] Su, H., Banerjee, J. (2015). [Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams](#). *Computers & Structures*, 147:107–116.
- [12] Lien, T. V., Duc, N. T., Khiem, N. T. (2017). [Mode shape analysis of multiple cracked functionally graded beam-like structures by using dynamic stiffness method](#). *Vietnam Journal of Mechanics*, 39(3):215–228.
- [13] Lien, T. V., Duc, N. T., Khiem, N. T. (2017). [Free vibration analysis of multiple cracked functionally graded Timoshenko beams](#). *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14(9):1752–1766.
- [14] Khiem, N. T., Lien, T. V. (2002). [The dynamic stiffness matrix method in forced vibration analysis of multiple-cracked beam](#). *Journal of Sound and Vibration*, 254(3):541–555.
- [15] Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F., Czarnecki, J. (2003). *A review of structural health monitoring literature: 1996–2001*. Los Alamos National Laboratory, USA.
- [16] Liew, K. M., Wang, Q. (1998). [Application of wavelet theory for crack identification in structures](#). *Journal of Engineering Mechanics*, 124(2):152–157.
- [17] Wang, Q., Deng, X. (1999). [Damage detection with spatial wavelets](#). *International Journal of Solids and Structures*, 36(23):3443–3468.
- [18] Chang, C. C., Chen, L. W. (2005). [Detection of the location and size of cracks in the multiple cracked beam by spatial wavelet based approach](#). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(1):139–155.
- [19] Zhong, S., Oyadiji, S. O. (2007). [Crack detection in simply supported beams without baseline modal parameters by stationary wavelet transform](#). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(4):1853–1884.
- [20] Khiem, N. T., Huyen, N. N. (2017). [A method for crack identification in functionally graded Timoshenko beam](#). *Nondestructive Testing and Evaluation*, 32(3):319–341.
- [21] Liên, T. V., Khiêm, N. T. (2017). *Phương pháp độ cứng động lực trong phân tích và chẩn đoán kết cấu*. Nhà xuất bản Xây dựng.