BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

HÀ THỊ THANH TÂM

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG MỜ DẠNG HYPERBOLIC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

HÀ THỊ THANH TÂM

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG MỜ DẠNG HYPERBOLIC

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9.46.01.03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Nguyễn Thị Kim Sơn
2. PGS.TS. Hoàng Việt Long

Hà Nội - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Kim Sơn và PGS.TS. Hoàng Việt Long. Các kết quả được phát biểu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Nghiên cứu sinh

Hà Thị Thanh Tâm

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được thực hiện tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của TS. Nguyễn Thị Kim Sơn và PGS.TS. Hoàng Việt Long. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy cô, người đã dẫn dắt tác giả vào một hướng nghiên cứu tuy khó khăn, vất vả nhưng thực sự thú vị và có ý nghĩa.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán- Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy giáo, cô giáo trong Bộ môn Giải tích đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, các đồng nghiệp tại Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn yêu thương, chia sẻ, động viên tác giả vượt qua khó khăn để hoàn thành luận án.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực	17
E	Không gian các số mờ	19
$\mathcal{K}_C$	Tập tất cả các tập con lồi, compact khác rỗng của $\mathbb{R}$	27
$\mathcal{F}(X)$	Tập tất cả các tập con mờ của tập hợp X	17
$[u]^\alpha$	$= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha,\, 0 < \alpha \leq 1\} = [u^-_\alpha, u^+_\alpha],\ u^-_\alpha, u^+_\alpha \in \mathbb{R}$	19
$[u]^0$	$= \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$	19
E_c	$\{u \in E : \alpha \mapsto [u]^\alpha$ liên tục theo metric Hausdorff trên$[0,1]\}$	26
$len[u]^\alpha$	$= u^+_\alpha - u^-_\alpha$	20
$\Gamma(.)$	Hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$	32
$B(.,.)$	Hàm Beta xác định bởi $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\ a,b > 0$	32
U	Tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}^2$	24
J_{ab}	$= [0,a] \times [0,b],\ a,b > 0$	36
J_r^{ab}	$= [-r,a] \times [-r,b],\ r,a,b > 0$	36
J_r^0	$= [-r,0] \times [-r,0], r > 0$	36
$\tilde{J}_r^{ab}$	$= J_r \setminus (0,a] \times (0,b],\ r,a,b > 0$	36
J_0^∞	$= [0,\infty) \times [0,\infty)$	46
J_r^∞	$= [-r,\infty) \times [-r,\infty),\ r > 0$	46
$\tilde{J}_r^\infty$	$= J_r^\infty \setminus (0,\infty) \times (0,\infty),\ r > 0$	46
Ω_T^b	$= [0,T] \times [0,b],\ T,b > 0$	70
Ω_∞^b	$= [0,\infty) \times [0,b],\ b > 0$	79
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	Đạo hàm riêng Hukuhara suy rộng của hàm giá trị mờ f theo x	29
$D_{xy}u(x,y)$	Đạo hàm riêng Hukuhara suy rộng cấp hai của hàm giá trị số mờ u theo x và y	30

${}^{RL}I^{q}_{0+}u$	Tích phân Riemann - Liouville bậc q của hàm giá trị thực u	32,61
${}^{C}D^{q}u$	Đạo hàm Caputo bậc q của hàm giá trị thực u	61
${}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}u$	Tích phân Riemann - Liouville bậc q của hàm giá trị mờ u	32,65
${}^{RL}_{gH}\mathcal{D}^{q}u$	Đạo hàm gH-Riemann-Liouville bậc q của hàm giá trị mờ u	33
${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^{q}u$	Đạo hàm gH-Caputo bậc q của hàm giá trị mờ u	33,68
$d_H(A,B)$	Khoảng cách Hausdorff giữa tập A và tập B	24
$d_\infty(u,v)$	$= \sup\limits_{0\le\alpha\le1} d_H\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right)$	24
$H(u,v)$	$= \sup\limits_{(x,y)\in U} d_\infty(u\left(x,y\right), v\left(x,y\right))$	26
$d^0_C(\varphi,\phi)$	$= \sup\limits_{(\omega,\theta)\in J^0_r} d_\infty(\varphi(\omega,\theta),\phi(\omega,\theta))$	36
$H_\lambda(u,v)$	$= \sup\limits_{(x,y)\in U}\left\{d_\infty(u\left(x,y\right), v\left(x,y\right))e^{-\lambda(x+y)}\right\}$	40
$d_r(u,v)$	$= \sup\limits_{(t,x)\in\Omega^b_T}\left\{t^{r_1}x^{r_2}d_\infty(u(t,x),v(t,x))\right\},\ r=(r_1,r_2),\ \ r_1,r_2>0$	72
$H^0_\beta(u,v)$	$= \sup\limits_{(t,x)\in\Omega^b_\infty}\left\{d_\infty(u(t,x),v(t,x))e^{-\beta t}\right\}$	80
$\psi(x,y)$	$= \eta_1(x)\oplus[\eta_2(y)\ominus_H u(0,0)],\ (x,y)\in U$	36
$T^f_\psi[u](x,y)$	$= \psi(x,y)\ominus_H(-1)\int_0^x\int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds, (x,y)\in U$	42
$F^{f,q}_\psi[u](t,x)$	$= \psi(t,x)\ominus_H(-1){}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}f(t,x,u(t,x)),(t,x)\in U$	73
$C(U,E)$	Tập tất cả các hàm liên tục từ U vào E	6
$L^1(U,X)$	Tập tất cả các hàm khả tích từ U vào $X, X=\mathbb{R}$ hoặc $X=E$	61
$L^\infty(U,\mathbb{R})$	Tập tất cả các hàm bị chặn từ U vào $\mathbb{R}$	94
$\mathcal{W}_1(U,E)$	Tập tất cả các hàm $u:U\to E$ sao cho $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi cùng kiểu	30
$\mathcal{W}_2(U,E)$	Tập tất cả các hàm $u:U\to E$ sao cho $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi khác kiểu	30
$C_\lambda(J^{ab}_r,E)$	Không gian các hàm $u\in C(J^{ab}_r,E)$ sao cho $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\tilde{J_r}^{ab}$ cùng với metric H_λ	40
$C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r,E)$	$=\{u\in C_\lambda(J^{ab}_r,E): T^f_\psi[u](x,y)\in E,\ \ (x,y)\in J_{ab}\}$	42

$C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E)$	Không gian các hàm $u \in C(J_r^{\infty}, E)$ cùng với metric H_{λ} thỏa mãn: *i)* $u(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \tilde{J}_r^{\infty}$ *ii)* $\sup\limits_{(x,y)\in J_r^{\infty}} d_{\infty}(u(x,y), \hat{0})e^{-\lambda(x+y)} < \infty$.	48
$C_{\lambda,\psi}^{\infty,f}(J_r^{\infty}, E)$	$= \{u \in C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E) : T_{\psi}^{f}[u](x,y) \in E,\ (x,y) \in J_r^{\infty}\}$	54
$C_{\psi}^{f}(\Omega_T^b, E)$	$= \{u \in (C(\Omega_T^b, E), d_r) : F_{\psi}^{f,q}[u](t,x) \in E,\ (t,x) \in \Omega_T^b\}$	73
$C_{\beta}^{\infty}(\Omega_{\infty}^b, E)$	Không gian các hàm $u \in C(\Omega_{\infty}^b, E)$ cùng với metric $H_{\beta}^0(u,v)$ thỏa mãn $\sup\limits_{(t,x)\in\Omega_{\infty}^b} \left\{d_{\infty}(u(t,x), v(t,x))e^{-\beta t}\right\} < \infty$.	80
$C_{\beta,\psi}^{\infty,f}(\Omega_{\infty}^b, E)$	$= \{u \in C_{\beta}^{\infty}(\Omega_{\infty}^b, E) : F_{\psi}^{f,q}[u](t,x) \in E,\ (t,x) \in \Omega_{\infty}^b\}$	83

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Lý thuyết tập mờ có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như thống kê, giải tích số, kỹ thuật điều khiển, xử lý hình ảnh và tín hiệu, kỹ thuật y sinh... Lý thuyết điều khiển mờ có ưu điểm vượt trội trong lĩnh vực tự động hóa và kỹ thuật với khả năng xử lý nhiều bài toán thực tế mà khó có thể mô tả bằng công thức toán học chính xác và điều khiển bằng các kỹ thuật thông thường [11, 33, 35].

Khi một vấn đề trong thế giới thực được mô hình hóa thành các bài toán giá trị ban đầu của một phương trình vi phân thường hoặc phương trình đạo hàm riêng thì hoặc là các dữ kiện ban đầu không được biết chính xác hoặc là các hàm phụ thuộc chứa các thông số không chắc chắn hoặc là điều kiện biên có sai số ... Vì vậy, yêu cầu thiết yếu được đặt ra là làm thế nào để giải quyết các bài toán có chứa yếu tố mơ hồ, không chắc chắn này? Câu trả lời được đề xuất lần đầu tiên bởi Giáo sư Lotfali Askar Zadeh, với các khái niệm cơ bản về lý thuyết tập mờ [59] và sau đó là lý thuyết logic mờ (năm 1973). Mặc dù vậy, tầm quan trọng của lý thuyết mờ và logic mờ chỉ được khẳng định khi trung tâm nghiên cứu logic mờ của Nhật Bản thành lập vào năm 1989. Sau khi có nhiều ứng dụng có ý nghĩa trong thực tiễn, lý thuyết mờ đã được cộng đồng khoa học thế giới ghi nhận, đánh dấu bởi sự kiện Viện kỹ thuật Điện và Điện tử của Mỹ cho thành lập tạp chí "Fuzzy Sets and Systems" năm 1978 và tạp chí “IEEE Transactions on Fuzzy Systems” vào năm 1993. Cho tới ngày nay, có rất nhiều sản phẩm điện tử sử dụng công nghệ logic mờ như: máy điều hòa nhiệt độ, máy giặt, máy rửa bát, thang máy, máy ảnh, trí tuệ nhân tạo trong các trò chơi điện tử, ...

Trong lý thuyết tập hợp cổ điển, mức độ thuộc của các phần tử vào một tập hợp được đánh giá theo hai khía cạnh - một phần tử thuộc hoặc không thuộc tập hợp. Lý thuyết tập mờ cho phép ta đánh giá mức độ thuộc của các phần tử vào một tập hợp một cách "từ từ". Điều này được mô tả bởi một hàm thể hiện "mức độ thuộc" lấy giá trị trong đoạn $[0, 1]$ (hàm thuộc). Tập mờ tổng quát hơn các tập hợp cổ điển, vì hàm đặc trưng của tập hợp cổ điển là một hàm thuộc đặc biệt của tập mờ, nó chỉ nhận các giá trị 0 hoặc 1. Tuy nhiên, khái niệm về tập mờ quá rộng và tổng quát, vì vậy một số hạn chế thường được áp đặt cho các tập mờ. Khi nghiên cứu về giải tích mờ, người ta thường xét các bài toán trên các tập mờ có dạng $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ thỏa mãn một số tính chất về tính lồi, compact và nửa liên tục trên (được trình bày cụ thể trong Chương 1). Tập hợp tất cả các tập mờ có các tính chất như trên được kí hiệu là E^n, và được gọi là không gian các số mờ. Để đơn giản, trong luận án này, chúng tôi trình bày các kết quả với $n = 1$, và kí hiệu E là không gian các số mờ $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Với $\alpha \in [0, 1]$, ta kí hiệu tập mức của một số mờ u là $[u]^\alpha$, với $[u]^\alpha$ được xác định bởi

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in (0, 1]; \quad [u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}.$$

Khi đó, không gian (E, d_∞) là không gian metric đầy đủ [22], với metric d_∞ được xác định bởi

$$d_\infty(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

ở đó d_H là khoảng cách Haussdorf giữa hai tập hợp. Phép cộng và phép nhân vô hướng trong tập các số mờ E được xác định bởi tập mức như sau:

$$[u \oplus v]^\alpha = \{x + y : x \in [u]^\alpha, y \in [v]^\alpha\} = [u]^\alpha + [v]^\alpha;$$

$$[\lambda.u]^\alpha = \{\lambda x : x \in [u]^\alpha\} = \lambda.[u]^\alpha; \alpha \in [0, 1], u, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Với phép cộng và phép nhân vô hướng được định nghĩa như trên, $(E, \oplus, .)$ trở thành một không gian nửa tuyến tính khi các điều kiện về tính giao hoán, kết hợp của phép "$\oplus$" và "." được thỏa mãn. Tuy nhiên rất không may mắn rằng khi chuyển các phép toán giữa các số mờ về các phép toán giữa các tập hợp, từ phản ví dụ rằng tổng $[0,1] + (-1).[0,1] = [0,1] + [-1,0] = [-1,1] \neq \{0\}$ ta suy ra rằng hiệu hai phần tử bất kì trong E (định nghĩa theo tập hợp thông thường) không phải lúc nào cũng tồn tại (trong E), cùng với đó là việc không tồn tại phần tử đối của một phần tử bất kì và phép phân phối

$$(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u \oplus \lambda_2 u$$

không đúng với $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tùy ý. Do đó, $(E, \oplus, .)$ không phải là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Hệ quả kéo theo đó là $(E, ||.||)$, ở đó $||u|| := d_\infty(u, \hat{0})$, không phải là không gian định chuẩn, không là không gian Banach cũng như không thể trang bị tích vô hướng trên E để biến E thành không gian Hilbert. Do đó mọi kết quả được xây dựng trên nền tảng vững chắc của giải tích thực, giải tích hàm, các kết quả giải tích trong không gian Banach không còn hữu dụng trong không gian này. Hơn nữa, (E, d_∞) không là không gian khả ly và cũng không compact địa phương (xem Chương 8, [12]). Do đó các phương pháp lập luận liên quan đến tập đếm được trù mật hay phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp đánh giá năng lượng hoặc sử dụng các định lý nhúng compact hầu như khó có thể sử dụng trong không gian này. Việc thiếu đi tính chất tuyến tính của $(E, \oplus, .)$, tính khả ly và compact địa phương của (E, d_∞) khiến cho các nghiên cứu giải tích trên nền không gian các số mờ gặp rất nhiều khó khăn. Và đây cũng là lý do chính, bên cạnh lý do về tính ứng dụng cao trong thực tế của logic mờ và điều khiển mờ, khiến cho giải tích mờ trở thành nhánh nghiên cứu mới thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong thời gian gần đây.

Hiện nay, các hướng nghiên cứu về phương trình vi phân, phương trình vi tích phân và phương trình đạo hàm riêng mờ được xem như là một sự mở rộng có ý nghĩa và đang thu hút được nhiều nhà khoa học ngoài nước cũng như trong nước quan tâm nghiên cứu bởi tính ứng dụng của những mô hình này. Từ khi ra đời cho đến nay, hơn nửa thế kỉ, lý thuyết mờ nói chung và giải tích mờ nói riêng vẫn trên con đường tự hoàn thiện. Do vậy, lý thuyết phương trình vi phân mờ, phương trình đạo hàm riêng mờ vì thế cũng trên con đường tự hoàn chỉnh theo.

Năm 1987, Kaleva [30] là người đầu tiên đưa ra hướng nghiên cứu về phương trình vi phân mờ dựa trên khái niệm đạo hàm Hukuhara [50], đặt nền móng cho nhiều phát triển sau đó. Cho đến nay, nhiều vấn đề trọng tâm của lý thuyết phương trình vi phân mờ đã được nghiên cứu, với số lượng các công trình được công bố tăng nhanh chóng [15, 16, 38, 41, 53]. Tuy nhiên, đạo hàm Hukuhara có nhược điểm là đường kính tập mức của một hàm khả vi Hukuhara luôn tăng. Điều này gây khó khăn khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận hay tính tuần hoàn của nghiệm. Năm 2005, Bede và Gal [13] đưa ra các khái niệm đạo hàm suy rộng cho các hàm giá trị số mờ, mở rộng của khái niệm đạo hàm Hukuhara, trong đó tập mức của một hàm giá trị số mờ khả vi suy rộng có thể có đường kính giảm. Phương trình vi phân mờ dưới khái niệm đạo hàm suy rộng cũng đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học (xem [7, 13, 14, 31, 54, 55, 57]).

Phương trình đạo hàm riêng mờ được Buckley và Feuring đưa ra năm 1999 [16], trong đó các tác giả sử dụng khái niệm hàm mờ khả vi của Puri và Ralescu để xây dựng quy trình tìm nghiệm mờ dựa trên tính liên tục của nguyên lý suy rộng Zadeh, tuy nhiên kết quả mới chỉ đạt được cho một số dạng phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một đơn giản. Sau đó, Allahviranloo (2011) và các cộng sự [8] cũng áp dụng quy trình của Buckley và Feuring kết hợp với phương pháp lặp biến thiên để tìm nghiệm mờ của một số lớp phương trình dạng sóng một chiều và hai chiều. Trong bài báo của Bertone cùng các cộng sự công bố năm 2013 [15], các tác giả đã nghiên cứu một số tính chất của nghiệm mờ của một số lớp phương trình kinh điển dạng phương trình truyền nhiệt, phương trình truyền sóng, phương trình Poisson với các tham số mờ. Họ áp dụng quy trình mờ hóa nghiệm cổ điển kết hợp với tính liên tục của nguyên lý suy rộng Zadeh để chứng minh được một số tính chất định tính của nghiệm mờ thông qua các tập mức. Bên cạnh đó, một số nhà nghiên cứu đã thành công trong việc mô hình hóa các quá trình trong thế giới thực bởi phương trình đạo hàm riêng mờ. Trong bài báo [29], Jafelice và các cộng sự đã sử dụng phương trình khuyếch tán với các tham số mờ để mô hình hóa cho sự chiếm giữ lãnh thổ và sự dịch chuyển của loài kiến xén lá ở rừng Amazon. Phương pháp dùng mô hình khuyếch tán mờ của Jafelice tỏ ra ưu việt hơn các mô hình truyền thống ở chỗ nó có thể tích hợp những yếu tố không chắc chắn, không rõ ràng vào các hệ sinh học. Chúng ta có thể tìm thấy mô hình của phương trình đạo hàm riêng mờ trong công nghiệp dầu mỏ trong cuốn sách của Nikravesh năm 2004 [47]. Trường hợp tổng quát, các quá trình công nghiệp trong tự nhiên thường phức hợp và không chắc chắn. Do đó các nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng mờ là có ý nghĩa quan trọng trong cả lý thuyết và thực hành. Nhưng cho đến nay, các nghiên cứu về lĩnh vực này còn rất ít và mới chỉ dừng lại ở những kết quả ban đầu cho những lớp phương trình đơn giản.

Được thúc đẩy bởi các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài "Bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic" với mong muốn bước đầu góp phần xây dựng lý thuyết toán học chặt chẽ nghiên cứu về các bài toán biên cho phương trình đạo hàm riêng có ẩn hàm nhận giá trị số mờ. Các kết quả nhận được là sự tồn tại nghiệm và một số tính chất định tính của nghiệm của bài toán biên địa phương (local) cho phương trình hyperbolic mờ có trễ và phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trong các miền bị chặn và miền không bị chặn.

2. Mục đích - Đối tượng - Phạm vi nghiên cứu của luận án

- Mục đích của luận án là nghiên cứu tính giải được cũng như một số tính chất định tính của nghiệm của một số lớp phương trình đạo hàm riêng mờ. Một số quy trình tìm nghiệm mờ xấp xỉ cũng được đưa ra trong ví dụ minh họa cụ thể.

- Đối tượng nghiên cứu của luận án là phương trình hyperbolic mờ có trễ và phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số.
- Phạm vi nghiên cứu của luận án bao gồm:
    - Các kết quả về lý thuyết điểm bất động trong các không gian trừu tượng, không gian metric, không gian metric nửa tuyến tính.
    - Lý thuyết giải tích mờ: tính liên tục, tính khả vi Hukuhara suy rộng, tính khả vi Caputo suy rộng và mối quan hệ giữa các khái niệm trên.
    - Ứng dụng giải tích mờ, lý thuyết điểm bất động để nghiên cứu bài toán biên cho lớp phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng mờ.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng kiến thức về giải tích hàm, không gian metric và lý thuyết điểm bất động, giải tích đa trị, lý thuyết độ đo, giải tích mờ, giải tích tập hợp.
- Sử dụng phương pháp phần tử bị chặn, nguyên lý suy rộng Zadeh để xây dựng thuật toán tìm nghiệm mờ.

4. Cấu trúc và các kết quả của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình đã công bố và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm 4 chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị: Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về lý thuyết tập mờ, số mờ và giải tích mờ được tổng kết từ các cuốn sách chuyên khảo của B. Bede [12] và Lakshmikantham [37].

Chương 2. Bài toán biên đối với phương trình hyperbolic mờ có trễ: Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được của phương trình hyperbolic mờ có trễ với đạo hàm Hukuhara suy rộng trên miền bị chặn và miền vô hạn. Một số ví dụ được chúng tôi đưa ra trong phần cuối chương để minh họa cho các kết quả đạt được.

Chương 3. Bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số: Trong phần đầu chương, chúng tôi xây dựng khái niệm tích phân Riemann-Liouville và đạo hàm Caputo bậc phân số cho hàm hai biến giá trị số mờ. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính giải được của bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trên miền bị chặn và trên miền vô hạn.

Chương 4. Một số tính chất định tính của nghiệm của phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số: Chương 4 nghiên cứu về tính ổn định Ulam, tính ổn định theo nghĩa Lyapunov của bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 04 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành (liệt kê ở mục "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án"), 01 bài đã được nhận đăng. Các nội dung chính trong luận án đã được báo cáo tại:

1) Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

2) Seminar Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

3) Seminar của phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

4) Seminar Phương pháp giải phương trình vi phân, Viện Công nghệ thông tin, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở về tập mờ, số mờ và các phép toán giải tích trên tập các số mờ cùng những ví dụ minh họa cụ thể. Các kiến thức này được trích từ hai cuốn sách chuyên khảo của Bede [12], Lakshmikantham và Mohapatra [37].

Như đã giới thiệu trong phần Mở đầu, không gian các số mờ E không là không gian tuyến tính. Các tính chất thường được sử dụng khi làm việc với giải tích mờ tập trung khai thác về tính đầy đủ của không gian metric (E, d_∞) cùng với một số tính chất bất biến theo phép cộng và tịnh tiến của metric d_∞. Một trong những phương pháp khắc phục khó khăn về tính không tuyến tính của không gian $(E, \oplus, .)$ là tìm cách định nghĩa hiệu của hai số mờ một cách thích hợp, trong đó tiêu biểu có thể kể đến là hiệu Hukuhara và hiệu Hukuhara suy rộng (Mục 1.1). Mục 1.2 giới thiệu về các phép toán giải tích của hàm nhận giá trị số mờ, trong đó đặc biệt kể đến khái niệm đạo hàm theo nghĩa Hukuhara suy rộng (Mục 1.2.2). Mục 1.3 trình bày một số khái niệm về giải tích bậc phân số cho các hàm nhận giá trị số mờ. Ngoài ra, một số định lý điểm bất động bao gồm Nguyên lý ánh xạ co Banach, Định lý Arzelà-Ascoli, Định lý điểm bất động Schauder cho không gian metric nửa tuyến tính sẽ được nhắc lại trong Mục 1.4.

1.1. Không gian metric các số mờ

1.1.1. Tập mờ

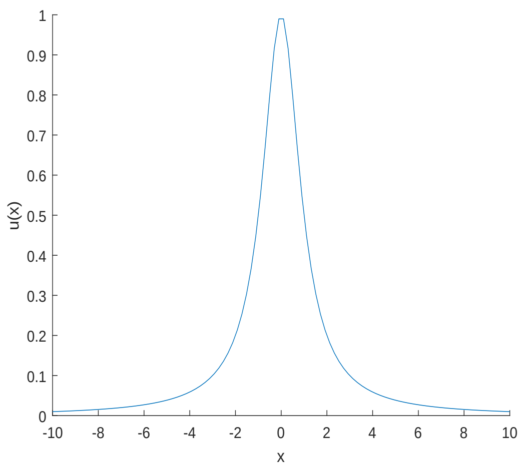
Định nghĩa 1.1. [59] Cho tập hợp X khác rỗng. Một tập mờ A trên không gian X được đặc trưng bởi hàm thuộc $u : X \to [0,1]$, trong đó u(x) thể hiện mức độ thuộc của x đối với tập A.

Ta đồng nhất tập mờ A với hàm thuộc $u(x)$ của nó và kí hiệu $\mathcal{F}(X)$ là tập tất cả các tập mờ trên không gian X. Khi đó, mỗi tập cổ điển là một tập mờ với hàm thuộc là một hàm đặc trưng của tập cổ điển.

Tập rỗng là tập mờ với hàm thuộc $u(x) = 0$, $\forall x \in X$. Tập X là tập mờ với hàm thuộc $u(x) = 1$, $\forall x \in X$.

Ví dụ 1.1. Hình 1 mô tả một tập mờ được biểu diễn dưới biến ngôn ngữ "các số thực gần 0" với hàm thuộc $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ xác định bởi

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



Hình 1. Tập mờ mô tả các số thực gần 0.

1.1.2. Nguyên lý suy rộng Zadeh

Định nghĩa 1.2. [60] Cho hai tập hợp X, Y khác rỗng và u là tập con mờ của X. Mở rộng Zadeh của hàm $f : X \to Y$ là hàm $F : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ sao cho $v = F(u)$, trong đó

$$v(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u(x) & \text{nếu } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2. [25] Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Theo Định nghĩa 1.2, ta có thể mở rộng hàm f thành hàm $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ và với mỗi $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $v = F(u) = au + b$, trong đó

$$v(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u(x) & \text{nếu } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Vì $f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$ nên ta có

$$v(y) = u\big(\frac{y-b}{a}\big), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Định lí 1.1. *[45] Giả sử u là một tập con mờ của $\mathbb{R}$ và $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ là mở rộng Zadeh của hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Khi đó, với mọi $\alpha \in [0, 1]$, ta có*

$$[F(u)]^\alpha = f([u]^\alpha).$$

Ví dụ 1.3. [11] Cho tập mờ $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ xác định bởi

$$u(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{nếu } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Dễ thấy

$$[u]^\alpha = \Big[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\Big], \forall \alpha \in [0, 1].$$

Xét hàm $f(x) = x^2$ với $x \geq 0$. Vì f tăng nên ta có

$$\begin{aligned} f([u]^\alpha) &= \Big[f\big(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha})\big), f\big(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\big)\Big] \\ &= \Big[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-\alpha})^2\Big]. \end{aligned}$$

Do đó, theo Định lý 1.1, hàm $F : \mathcal{F}([0, \infty)) \to \mathcal{F}([0, \infty))$, mở rộng Zadeh của hàm f, có tập mức α là

$$[F(u)]^\alpha = \Big[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-\alpha})^2\Big].$$

1.1.3. Không gian metric các số mờ

Định nghĩa 1.3. [22] Cho một tập con mờ của đường thẳng thực $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Khi đó, u được gọi là một số mờ nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

i) u chuẩn tắc, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $u(x_0) = 1$;

ii) u lồi mờ, theo nghĩa với $x, y \in \mathbb{R}$ và $0 < \lambda \leq 1$:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\};$$

iii) u nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$ (u nửa liên tục trên tại x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$ thì $u(x) - u(x_0) < \varepsilon$).;

iv) $[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ là tập compact trong $\mathbb{R}$.

Kí hiệu E là không gian các số mờ và $[u]^\alpha$ là tập mức của số mờ u, trong đó $[u]^\alpha$ được xác định bởi

$$[u]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}, \ \alpha \in (0, 1] \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}, \ \alpha = 0. \end{cases}$$

Định lí 1.2. *[44] (Định lý Stacking) Nếu $u \in E$ và $[u]^\alpha$ là tập mức của nó thì:*

(i) $[u]^\alpha$ là một khoảng đóng, $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, với mọi $\alpha \in [0, 1]$;

(ii) Nếu $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ thì $[u]^{\alpha_2} \subseteq [u]^{\alpha_1}$.

(iii) Mọi dãy $\{\alpha_n\}$ đơn điệu tăng hội tụ dưới tới $\alpha \in (0, 1]$, ta có

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha.$$

(iv) Mọi dãy $\{\alpha_n\}$ đơn điệu giảm hội tụ trên tới 0, ta có

$$cl\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}\Big) = [u]^0.$$

Định lí 1.3. *[44] (Định lý đặc trưng Negoita-Ralescu) Giả sử* $\{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *là họ các tập con của* $\mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện*

(i) M_α *là một khoảng đóng khác rỗng với mọi* $\alpha \in [0,1]$*;*

(ii) Nếu $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ *thì* $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$*;*

(iii) Mọi dãy $\{\alpha_n\}$ *đơn điệu tăng hội tụ dưới tới* $\alpha \in (0,1]$*, ta có*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha;$$

(iv) Mọi dãy $\{\alpha_n\}$ *đơn điệu giảm hội tụ trên tới* 0*, ta có*

$$cl\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}\Big) = M_0.$$

Khi đó, tồn tại duy nhất $u \in E$ *sao cho* $[u]^\alpha = M_\alpha$ *với mọi* $\alpha \in [0,1]$*.*

Định lí 1.4. *[24] Giả sử* $u \in E$ *và* $[u]^\alpha = [u^-_\alpha, u^+_\alpha]$*,* $0 < \alpha \le 1$*. Khi đó, các hàm* $u^-, u^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các tính chất sau*

i) $u^-(\alpha) = u^-_\alpha$ *là hàm không giảm, bị chặn và liên tục trái theo* $\alpha \in (0,1]$ *và liên tục phải tại 0;*

ii) $u^+(\alpha) = u^+_\alpha$ *là hàm không tăng, bị chặn và liên tục trái theo* $\alpha \in (0,1]$ *và liên tục phải tại 0;*

iii) $u^-_1 \le u^+_1$*.*

Ngược lại, nếu các hàm $u^-, u^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện i) - iii) thì tồn tại số mờ* $u \in E$ *sao cho tập mức* $[u]^\alpha = [u^-_\alpha, u^+_\alpha]$*.*

Ta kí hiệu đường kính tập mức của số mờ u là $len[u]^\alpha$ và ta có

$$len[u]^\alpha = u^+_\alpha - u^-_\alpha.$$

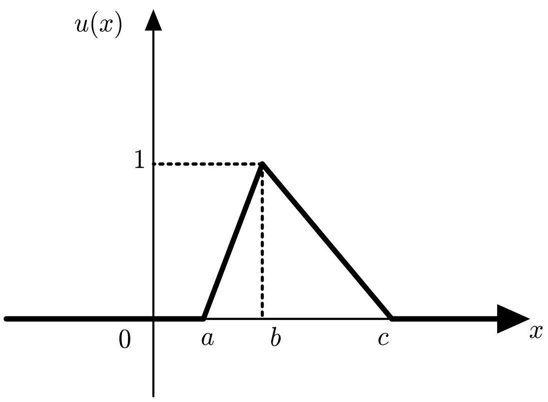
Ví dụ 1.4. Số mờ tam giác. Cho $a < b < c$. Xét số mờ có hàm thuộc xác định bởi

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{nếu } b \le x \le c \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a,c]. \end{cases}$$

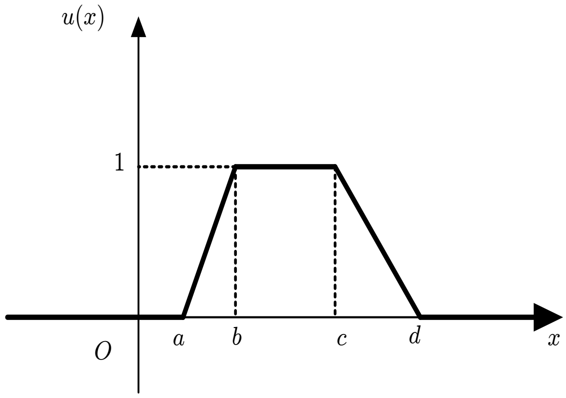
Đồ thị của u được mô tả trong Hình 2. Tập mức của u có dạng

$$[u]^\alpha = [(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c], \ \alpha \in [0,1].$$

Ta gọi số mờ như vậy là số mờ tam giác và viết gọn dưới dạng $u = (a, b, c)$.



Hình 2. Số mờ tam giác.



Hình 3. Số mờ hình thang.

Ví dụ 1.5. Số mờ hình thang. Cho $a < b < c < d$. Xét số mờ có hàm thuộc u xác định bởi

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a \le x \le b \\ 1 & \text{nếu } b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & \text{nếu } c \le x \le d \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a,d]. \end{cases}$$

Đồ thị của u được mô tả trong Hình 3. Tập mức của u có dạng

$$[u]^\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d], \ \alpha \in [0,1].$$

Ta gọi số mờ như vậy là số mờ hình thang và viết gọn dưới dạng $u = (a, b, c, d)$.

Giả sử u, v là hai số mờ với các tập mức $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, $[v]^\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$. Sử dụng Định lý 1.4, ta định nghĩa tổng của hai số mờ và tích vô hướng của phần tử $k \in \mathbb{R}$ với số mờ thông qua tập mức. Tổng u và v, được kí hiệu $u \oplus v$, là một số mờ với tập mức được xác định bởi:

$$[u \oplus v]^\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+].$$

Với $k \in \mathbb{R}$, tích của k với u, được kí hiệu bởi ku, là một số mờ với tập mức được xác định bởi

$$[ku]^\alpha = \begin{cases} [ku_\alpha^-, ku_\alpha^+], \; k \geq 0, \\ [ku_\alpha^+, ku_\alpha^-], \; k < 0. \end{cases}$$

Hiệu Hukuhara của u, v được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.4. [28] Cho $u, v \in E$. Nếu tồn tại $\omega \in E$ sao cho $u = v \oplus \omega$ thì ω được gọi là hiệu *Hukuhara* của u và v, ký hiệu là $u \ominus_H v$.

Dễ thấy rằng $u \ominus_H v \neq u \oplus (-1)v$. Hơn nữa, nếu $u \ominus_H v$ tồn tại thì nó là duy nhất và $[u \ominus_H v]^\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+]$ với mọi $0 \leq \alpha \leq 1$.

Mệnh đề 1.1. *[56] Sự tồn tại hiệu Hukuhara $u \ominus_H v$ được đảm bảo khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) $len[u]^\alpha \geq len[v]^\alpha$ *với mọi* $0 \leq \alpha \leq 1$,

(ii) $u_\alpha^- - v_\alpha^-$ *đơn điệu tăng theo* α,

(iii) $u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ *đơn điệu giảm theo* α.

Một số tính chất sau đúng với các phép toán trên E. Kết quả được trích từ Bổ đề 2.3 trong bài báo số 2 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Mệnh đề 1.2. *Với mọi* $u, v, w \in E$ *ta có:*

1) $(-1)(u \oplus v) = (-1)u \oplus (-1)v$.

2) *Nếu* $u \ominus_H v$ *tồn tại thì* $(-1)u \ominus_H (-1)v$ *tồn tại và* $(-1)(u \ominus_H v) = (-1)u \ominus_H (-1)v$.

3) *Nếu* $u \ominus_H (v \oplus w)$ *tồn tại thì* $u \ominus_H v \ominus_H w$ *tồn tại và* $u \ominus_H (v \oplus w) = u \ominus_H v \ominus_H w$.

4) *Nếu* $u \ominus_H v$ *và* $v \ominus_H w$ *tồn tại thì* $u \ominus_H (v \ominus_H w)$ *tồn tại và* $u \ominus_H (v \ominus_H w) = (u \ominus_H v) \oplus w$.

Chứng minh. Dễ thấy các tính chất 1) và 2) đúng. Ta chứng minh tính chất 3). Vì $u \ominus_H (v \oplus w)$ tồn tại nên giả sử $u \ominus_H (v \oplus w) = e \in E$. Khi đó, $u = e \oplus v \oplus w$. Theo định nghĩa hiệu Hukuhara ta có $u \ominus_H v = e \oplus w$ hay $u \ominus_H v \ominus_H w = e$. Do đó, $u \ominus_H (v \oplus w) = u \ominus_H v \ominus_H w$.

4) Giả sử $u \ominus_H v$ và $v \ominus_H w$ tồn tại, khi đó tồn tại $e, g \in E$ sao cho $u \ominus_H v = e$ và $v \ominus_H w = g$. Từ đó ta suy ra $u = v \oplus e$, $v = w \oplus g$.
Do đó $u = w \oplus g \oplus e$ hay $u \ominus_H g = e \oplus w$. □

Nhận xét 1.1. Hiệu Hukuhara có tính chất $u \ominus_H u = \hat{0}$. Tuy nhiên, hiệu này không tồn tại trong trường hợp đường kính của số mờ u nhỏ hơn đường kính số mờ v. Do đó, một khái niệm mở rộng hơn khái niệm hiệu Hukuhara được đưa ra trong [56] để khắc phục hạn chế trên.

Định nghĩa 1.5. [56] Cho $u, v \in E$, hiệu Hukuhara suy rộng của u và v, kí hiệu bởi $u \ominus_{gH} v$, được xác định bởi phần tử $w \in E$ sao cho

$$u \ominus_{gH} v = w \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} (i) \quad u = v \oplus w \\ (ii) \quad v = u \oplus (-1)w. \end{array} \right.$$

Chú ý rằng $u \ominus_{gH} u = \hat{0}$, và nếu $u \ominus_H v$ tồn tại thì $u \ominus_{gH} v = u \ominus_H v$. Nếu (i) và (ii) trong Định nghĩa 1.5 đồng thời thỏa mãn thì w là một số thực thông thường. Dễ thấy rằng $u \ominus_{gH} u = \hat{0}$ và hiệu Hukuhara suy rộng tồn tại trong nhiều trường hợp hơn hiệu Hukuhara, nhưng nó không luôn luôn tồn tại trong E. Ví dụ sau trình bày một trường hợp trong đó hiệu $u \ominus_{gH} v$ không tồn tại.

Ví dụ 1.6. Cho số mờ hình thang $u = (1, 2, 3, 5)$ và số mờ tam giác $v = (0, 3, 9)$. Khi đó, hiệu Hukuhara suy rộng $u \ominus_{gH} v$ không tồn tại.

Thật vậy, nếu ta giả sử ngược lại tồn tại hiệu $u \ominus_{gH} v$ thì $u_\alpha^- - v_\alpha^- \leq u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ hoặc là $u_\alpha^- - v_\alpha^- \geq u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Trong khi đó, với $\alpha = 0$, ta có

$$1 = u_0^- - v_0^- > u_0^+ - v_0^+ = -4$$

và với $\alpha = 1$ thì $-1 = u_1^- - v_1^- < u_1^+ - v_1^+ = 0$. Điều này mâu thuẫn. Do đó, hiệu $u \ominus_{gH} v$ không tồn tại.

Trên E, ta xây dựng metric d_∞ xác định bởi

$$\begin{aligned} d_\infty(u,v) &= \sup_{0\leq\alpha\leq1} d_H\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right) \\ &= \sup_{0\leq\alpha\leq1} \max\{|u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+|\}. \end{aligned}$$

trong đó d_H là khoảng cách Hausdorff giữa hai tập mức của hai số mờ u, v, $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, $[v]^\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$. Tính đầy đủ của không gian metric (E, d_∞) đã được chứng minh chi tiết trong cuốn sách chuyên khảo [22].

Mệnh đề 1.3. *[22, 31] Metric d_∞ thỏa mãn một số tính chất sau*

i) $d_\infty(ku, kv) = |k| d_\infty(u,v)$, *với mọi* $k \in \mathbb{R}, u, v \in E$*;*

ii) $d_\infty(u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2) \leq d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2)$, *với* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$*;*

iii) $d_\infty(u \oplus w, v \oplus w) = d_\infty(u,v)$ *với mọi* $u, v, w \in E$*;*

iv) $d_\infty(u \ominus_H v, w \ominus_H e) \leq d_\infty(u,w) + d_\infty(v,e)$ *với mọi* $u, v, w, e \in E$*.*

Hơn nữa, không gian metric (E, d_∞) là không gian metric đầy đủ.

1.2. Sơ lược về giải tích mờ

1.2.1. Hàm nhận giá trị số mờ

Định nghĩa 1.6. Ánh xạ $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to E$ biến mỗi phần tử $(x,y) \in U$ thành phần tử $f(x,y) \in E$ được gọi là hàm hai biến nhận giá trị số mờ (sau đây chúng tôi sẽ gọi đơn giản là hàm mờ).

Ví dụ 1.7. Cho số mờ tam giác $T_0 = (0, 1, 2)$ có hàm thuộc

$$T_0(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{nếu } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{nếu } t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Xét hàm mờ

$$\begin{aligned} f : \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \times [1, 5] &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = y \sin\Big(x + \frac{\pi}{6}\Big) T_0. \end{aligned}$$

Khi đó, số mờ $f(x, y) \in E$ xác định bởi hàm thuộc

$$f(x,y)(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big)} & \text{nếu } \ 0 \leq t \leq y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big) \\ \dfrac{2y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big) - t}{y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big)} & \text{nếu } \ y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big) \leq t \leq 2y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big) \\ 0 & \text{nếu } \ t \notin \Big[0, 2y \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big)\Big], \end{cases}$$

với mọi $(x, y) \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big] \times [1, 5]$.

1.2.2. Các tính chất giải tích của hàm nhận giá trị số mờ

a) Tính liên tục

Định nghĩa 1.7. Cho $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Hàm $f : U \to E$ được gọi là liên tục tại $(x_0, y_0) \in U$ nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mỗi $(x, y) \in U$ thỏa mãn $|x - x_0| + |y - y_0| < \delta$, ta có

$$d_\infty(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \varepsilon.$$

Hàm f được gọi là liên tục trên U nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc U.

Từ định nghĩa metric d_∞, dễ thấy rằng ánh xạ $f : U \to E$, với $[f(x, y)]^\alpha = [f_\alpha^-(x, y), f_\alpha^+(x, y)]$, liên tục tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi các hàm $f_\alpha^-, f_\alpha^+ : U \to \mathbb{R}$ cũng liên tục tại (x_0, y_0) với mọi $\alpha \in [0, 1]$.

Ví dụ 1.8. Xét hàm mờ f xác định trong Ví dụ 1.7. Khi đó

$$[f(x,y)]^\alpha = \Big[y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\alpha, -y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\alpha + 2y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\Big].$$

Ta có f là một hàm liên tục trên $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]\times[1,5]$ vì với mọi $\alpha\in[0,1]$, các hàm $f_\alpha^-(x,y) = y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\alpha$, $f_\alpha^+(x,y) = -y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\alpha + 2y\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)$ liên tục trên $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]\times[1,5]$.

Kí hiệu $C(U,E)$ là tập các hàm giá trị mờ liên tục đi từ U vào E. Khi $U=[a,b]\times[c,d]$, trên $C(U,E)$, ta xây dựng metric H xác định bởi

$$H(u,v) = \sup_{(x,y)\in U} d_\infty(u\,(x,y)\,, v\,(x,y)).$$

Theo [46], $(C(U,E),H)$ là không gian metric đầy.

Định nghĩa 1.8. Hàm $f : U\times E\to E$ được gọi là liên tục tại điểm $(x_0,y_0,\varphi)\in U\times E$ nếu với $\varepsilon>0$ bất kỳ, tồn tại $\delta>0$ sao cho với mỗi $(x,y,u)\in U\times E$ thỏa mãn $|x-x_0|+|y-y_0|+d_\infty(u,\varphi)<\delta$, ta có

$$d_\infty(f(x,y,u), f(x_0,y_0,\varphi)) < \varepsilon.$$

Hàm f được gọi là liên tục trên $U\times E$ nếu f là liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0,\varphi)\in U\times E$.

Kí hiệu E_c không gian tất cả các số mờ $u\in E$ sao cho hàm $\alpha\mapsto[u]^\alpha$ liên tục theo metric Hausdorff trên $[0,1]$.

Định nghĩa 1.9. [51]

1) Tập con $A\subset E_c$ được gọi là có giá compact nếu tồn tại một tập compact $K\subseteq\mathbb{R}$ sao cho $[u]^0\subseteq K$ với mọi $u\in A$.

2) Tập con $A\subset E_c$ được gọi là đồng liên tục mức tại $\alpha_0\in[0,1]$ nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ thì $d_H([u]^\alpha,[u]^{\alpha_0})<\varepsilon$, với mọi $u\in A$. Tập con A được gọi là đồng liên tục mức trên $[0,1]$ nếu A là đồng liên tục mức tại mọi điểm $\alpha\in[0,1]$.

3) Một hàm liên tục $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \times E_c \to E_c$ được gọi là compact nếu với $I \subseteq U$ và tập $A \subseteq E_c$ bị chặn thì $f(I \times A)$ là compact tương đối trong E_c.

Định lí 1.5. *[51] Giả sử A là tập con có giá compact trong E_c. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(a) A là tập con compact tương đối của (E_c, d_∞).

(b) A là đồng liên tục mức trên $[0,1]$.

Nhận xét 1.2. [32] Nếu A compact tương đối trong (E_c, d_∞) thì A là có giá compact và đồng liên tục mức trên $[0,1]$. Ngược lại, nếu A có giá compact trong E_c và đồng liên tục mức trên $[0,1]$ thì A là compact tương đối trong (E_c, d_∞).

b) Tính khả tích

Kí hiệu $\mathcal{K}_C$ là tập tất cả các tập con lồi, compact khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $S(F)$ là tập tất cả các hàm chọn khả tích Lebesgue của hàm giá trị tập $F : [a,b] \to \mathcal{K}_C$, tức là

$$S(F) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ khả tích Lebesgue và } f(t) \in F(t),\ \forall t \in [a,b]\}.$$

Định nghĩa 1.10. [20] Hàm $f : [a,b] \to E$ được gọi là đo được mạnh nếu với mọi $\alpha \in [0,1]$ ánh xạ giá trị tập $f_\alpha : [a,b] \to \mathcal{K}_C$ xác định bởi $f_\alpha(x) = [f(x)]^\alpha$ là đo được Lebesgue.

Hàm $f : [a,b] \to E$ được gọi là bị chặn khả tích nếu tồn tại một hàm khả tích $h : [a,b] \to [0,\infty)$ sao cho $d_\infty\big(f(x), \hat{0}\big) \le h(x),\ \forall\, x \in [a,b]$.

Một hàm mờ bị chặn khả tích và đo được mạnh được gọi là khả tích. Tích phân của f trên $[a,b]$, kí hiệu là $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, xác định bởi tập mức

$$\begin{aligned}\Big[\int_a^b f(x)dx\Big]^\alpha &= \int_a^b [f(x)]^\alpha dx \\ &= \Big\{\int_a^b g(x)dx : g \in S\big([f(x)]^\alpha\big)\Big\}\end{aligned}$$

với mọi $\alpha \in [0,1]$.

Kí hiệu $L^1([a,b],E)$ là tập tất cả các hàm mờ khả tích trên $[a,b]$.

Ví dụ 1.9. [20] Xét hàm mờ

$$f : [0{,}1] \to E$$
$$x \mapsto f(x)$$

trong đó $f(x) \in E$ với hàm thuộc

$$f(x)(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t = 0 \\ x & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

Khi đó, f có tập mức $[f(0)]^\alpha = \{0\}$ và

$$[f(x)]^\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } 0 < x < \alpha \\ [0,1] & \text{nếu } \alpha \le x \le 1 \end{cases}$$

với mọi $\alpha \in [0,1]$. Do đó, ta có

$$\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^\alpha = \int_0^1 [f(x)]^\alpha dx = [0, 1-\alpha].$$

Mệnh đề 1.4. *[30] Nếu hàm $f : [a,b] \to E$ liên tục thì nó khả tích. Hơn nữa*

$$\Big[\int_a^b f(x)dx\Big]^\alpha = \Big[\int_a^b f_\alpha^-(x), \int_a^b f_\alpha^+(x)\Big]$$

với mọi $\alpha \in [0,1]$, trong đó $[f(x)]^\alpha = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)]$.

Định lí 1.6. *[20] Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$ và $f, g \in L^1([a,b],E)$. Khi đó, ta có*

i) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \oplus g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \oplus \int_a^b g(x)dx$

ii) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

iii) $d_\infty(f(x), g(x))$ *khả tích và*

$$d_\infty\Big(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx\Big) \le \int_a^b d_\infty(f(x), g(x))dx.$$

c) Tính khả vi

Định nghĩa 1.11. [57] Giả sử $x_0 \in (a, b)$. Ta nói hàm $f : (a, b) \to E$ là khả vi Hukuhara suy rộng (hay gH-khả vi) tại x_0 nếu tồn tại $u \in E$ sao cho với mọi h thỏa mãn $x_0 + h \in (a, b)$, hiệu $f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)$ tồn tại và

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)\big) = u.$$

Khi đó, u được gọi là đạo hàm Hukuhara suy rộng của f tại x_0, kí hiệu $f'_{gH}(x_0)$.

Định nghĩa 1.12. [7] Cho hàm $f : U \to E$. Ta nói rằng f là khả vi Hukuhara suy rộng (hay gH-khả vi) theo x tại $(x_0, y_0) \in U$ nếu tồn tại phần tử $v \in E$ sao cho với mọi h thỏa mãn $(x_0 + h, y_0) \in U$, hiệu $f(x_0 + h, y_0) \ominus_{gH} f(x_0, y_0)$ tồn tại và

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f\,(x_0 + h, y_0) \ominus_{gH} f\,(x_0, y_0)\,\big) = v.$$

Khi đó, v được gọi là đạo hàm riêng Hukuhara suy rộng của f theo x tại (x_0, y_0), kí hiệu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Đạo hàm riêng Hukuhara suy rộng của f theo y và các đạo hàm riêng bậc cao hơn của f tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ được định nghĩa tương tự.

Định nghĩa 1.13. [7] Giả sử $f : U \to E$ là gH-khả vi theo x tại $(x_0, y_0) \in U$ và $[f(x, y)]^\alpha = [f^-_\alpha(x, y), f^+_\alpha(x, y)]$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$, $(x, y) \in U$. Ta nói rằng

- f là gH-khả vi kiểu (i) theo x tại $(x_0, y_0) \in U$ nếu

$$\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Big]^\alpha = \Big[\frac{\partial f^-_\alpha}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f^+_\alpha}{\partial x}(x_0, y_0)\Big], 0 \le \alpha \le 1$$

- f là gH-khả vi kiểu (ii) theo x tại $(x_0, y_0) \in U$ nếu

$$\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Big]^\alpha = \Big[\frac{\partial f^+_\alpha}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f^-_\alpha}{\partial x}(x_0, y_0)\Big], 0 \le \alpha \le 1.$$

Kí hiệu

- $D_{xy}u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)$ là đạo hàm riêng Hukuhara suy rộng cấp hai của u theo x và y.

- $C^x_{(1)-gH}(U,E)$ (hoặc $C^y_{(1)-gH}(U,E)$) tập tất cả các hàm liên tục u khả vi kiểu (i) theo x (hoặc y) trên U.

- $C^x_{(2)-gH}(U,E)$ (hoặc $C^y_{(2)-gH}(U,E)$) tập tất cả các hàm liên tục u khả vi kiểu (ii) theo x (hoặc y) trên U.

- $\mathcal{W}_1(U,E) = \Big\{u|(u,u_x) \in C^x_{(k)-gH}(U,E) \times C^y_{(k)-gH}(U,E),\ k=1,2\Big\}.$

- $\mathcal{W}_2(U,E) = \Big\{u|(u,u_x) \in C^x_{(1)-gH}(U,E) \times C^y_{(2)-gH}(U,E)\Big\}$

$$\bigcup \Big\{u|(u,u_x) \in C^x_{(2)-gH}(U,E) \times C^y_{(1)-gH}(U,E)\Big\}.$$

Nhận xét 1.3. Nếu $u \in \mathcal{W}_1(U,E)$ thì

$$\Big[D_{xy}u(x,y)\Big]^\alpha = \Big[\frac{\partial^2 u^-_\alpha}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u^+_\alpha}{\partial x \partial y}(x,y)\Big] \text{ với } 0 \le \alpha \le 1.$$

Nếu $u \in \mathcal{W}_2(U,E)$ thì

$$\Big[D_{xy}u(x,y)\Big]^\alpha = \Big[\frac{\partial^2 u^+_\alpha}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u^-_\alpha}{\partial x \partial y}(x,y)\Big] \text{ với } 0 \le \alpha \le 1.$$

Ví dụ 1.10. Xét hàm $f(x,y) = xe^{-y}(1,2,3)$ với $(x,y) \in [0,1] \times [-2,0]$. Khi đó, ta có

- f gH-khả vi kiểu (i) theo x và

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-y}(1,2,3).$$

- f gH-khả vi kiểu (ii) theo y và

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{-y}(-3,-2,-1).$$

Mệnh đề 1.5. *[14] Giả sử $f : [a, b] \to E$ là hàm liên tục. Khi đó*

(i) Hàm mờ $F(t) = \gamma \oplus \int\limits_a^t f(s)ds$ là gH-khả vi kiểu (i) và $F'_{gH}(t) = f(t)$, trong đó $\gamma \in E$.

(ii) Hàm mờ $G(t) = \gamma \ominus_H \int\limits_a^t f(s)ds$ là gH-khả vi kiểu (ii) và $G'_{gH}(t) = (-1)f(t)$, trong đó $\gamma \in E$ sao cho tồn tại hiệu $\gamma \ominus_H \int\limits_a^t f(s)ds$.

Mệnh đề 1.6. *Cho hàm $f : [a, b] \to E$. Khi đó, ta có các khẳng định sau.*

i) Nếu f là gH-khả vi kiểu (i) trên $[a, b]$ và $f'_{gH}(.)$ là khả tích trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f'_{gH}(t)dt = f(b) \ominus_H f(a)$$

ii) Nếu f là gH-khả vi kiểu (ii) trên $[a, b]$ và $f'_{gH}(.)$ là khả tích trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f'_{gH}(t)dt = (-1)f(a) \ominus_H (-1)f(b).$$

Chứng minh. i) Nếu f là gH-khả vi kiểu (i) thì $[f'_{gH}(t)]^\alpha = [(f^-_\alpha)'(t), (f^+_\alpha)'(t)]$ với mọi $t \in [a, b]$. Điều này suy ra

$$\begin{aligned}\Big[\int_a^b f'_{gH}(t)dt\Big]^\alpha &= \Big[\int_a^b (f^-_\alpha)'(t)dt, \int_a^b (f^+_\alpha)'(t)dt\Big]\\ &= \Big[f^-_\alpha(b) - f^-_\alpha(a), f^+_\alpha(b) - f^+_\alpha(a)\Big]\\ &= [f(b) \ominus_H f(a)]^\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].\end{aligned}$$

ii) Nếu f là gH-khả vi kiểu (ii) thì $[f'_{gH}(t)]^\alpha = [(f^+_\alpha)'(t), (f^-_\alpha)'(t)]$ với mọi $t \in [a, b]$. Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}\Big[\int_a^b f'_{gH}(t)dt\Big]^\alpha &= \Big[\int_a^b (f^+_\alpha)'(t)dt, \int_a^b (f^-_\alpha)'(t)dt\Big]\\ &= \Big[f^+_\alpha(b) - f^+_\alpha(a), f^-_\alpha(b) - f^-_\alpha(a)\Big]\\ &= [(-1)f(a) \ominus_H (-1)f(b)]^\alpha.\end{aligned}$$

với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Mệnh đề được chứng minh. □

1.3. Sơ lược về giải tích bậc phân số mờ

Định nghĩa 1.14. [34] Giả sử $q > 0$ và $u \in L^1([0,a], \mathbb{R})$. Tích phân Riemann - Liouville bậc $q > 0$ của u được xác định bởi

$$^{RL}I^q_{0+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Định nghĩa 1.15. [9] Giả sử $u \in L^1([0,a], E)$ và $[u(t)]^\alpha = [u^-_\alpha(t), u^+_\alpha(t)]$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Tích phân Riemann - Liouville bậc $q > 0$ của hàm mờ u được kí hiệu hình thức dưới dạng

$$^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds$$

và được xác định bởi tập mức

$$[^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+}u(t)]^\alpha = [^{RL}I^q_{0+}u^-_\alpha(t), {}^{RL}I^q_{0+}u^+_\alpha(t)]$$

với mọi $\alpha \in [0,1]$ và $t \in [0,a]$.

Ví dụ 1.11. [9] Cho $u : [0,a] \to E$, $u(t) = Ct^2$, trong đó $C \in E$ với tập mức $[C]^\alpha = [C^-_\alpha, C^+_\alpha]$. Khi đó, với mọi $q > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
[^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+}u(t)]^\alpha &= [^{RL}I^q_{0+}C^-_\alpha t^2, {}^{RL}I^q_{0+}C^+_\alpha t^2] \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\Big[\int_0^t (t-s)^{q-1} C^-_\alpha s^2 ds, \int_0^t (t-s)^{q-1} C^+_\alpha s^2 ds\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}[t^{q+2}B(q,3)C^-_\alpha, t^{q+2}B(q,3)C^+_\alpha] \\
&= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(q+3)} t^{q+2}[C]^\alpha
\end{aligned}$$

trong đó $B(.,.)$ là hàm Beta xác định bởi

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \; a,b > 0.$$

Điều này có nghĩa ${}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0^+}u(t) = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(q+3)}t^q u(t)$.

Định nghĩa 1.16. [9] Giả sử $q \in (0,1)$ và $u \in L^1([0,a],E)$. Đạo hàm gH-Riemann-Liouville bậc q của hàm mờ u được xác định bởi:

$$ {}^{RL}_{gH}\mathcal{D}^q u(t) = \frac{d}{dt}{}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{1-q}_{0^+}u(t),\ t \in [0,a] $$

với điều kiện các biểu thức ở vế phải được xác định.

Định nghĩa 1.17. [6] Giả sử $q \in (0,1)$ và $u \in L^1([0,a],E)$. Đạo hàm gH-Caputo bậc q của hàm mờ u được xác định bởi:

$$ {}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(t) = {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{1-q}_{0^+}u'_{gH}(t),\ t \in [0,a] $$

với điều kiện các biểu thức ở vế phải được xác định.

Ví dụ 1.12. [6, 9] Xét hàm mờ $u : [0,a] \to E,\ u(t) = C$ trong đó $C \in E$ với tập mức $[C]^\alpha = [C^-_\alpha, C^+_\alpha]$. Khi đó, với $q \in (0,1)$, ta có

$$ \begin{aligned} [{}^{RL}_{gH}\mathcal{D}^q u(t)]^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(1-q)}\Big[\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-q}C^-_\alpha ds, \frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-q}C^+_\alpha ds\Big] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)}t^{-q}[C^-_\alpha, C^+_\alpha] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)}t^{-q}[C]^\alpha. \end{aligned} $$

Điều này có nghĩa ${}^{RL}_{gH}\mathcal{D}^q C = \dfrac{1}{\Gamma(1-q)}t^{-q}C$.

Mặt khác, dễ thấy rằng $u'_{gH}(t) = \hat{0}$. Do đó, ta có ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q C = \hat{0}$.

1.4. Một số định lý điểm bất động

Định nghĩa 1.18. (***Ánh xạ co***) Giả sử (X,d) là không gian metric. Ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là ánh xạ co nếu tồn tại $0 < k < 1$ sao cho

$$ d(f(x), f(y)) \le kd(x,y),\ \forall x, y \in X. $$

Định lí 1.7. ***(Nguyên lý ánh xạ co Banach)****. Giả sử* (X, d) *là không gian metric đầy. Khi đó, ánh xạ co* $f : X \to X$ *có duy nhất điểm bất động, tức là, tồn tại duy nhất* $x \in X$ *sao cho* $f(x) = x$.

Định lí 1.8. *[51] (****Định lý Arzelà-Ascoli****) Giả sử* X, Y *là các không gian metric và* $F \subseteq C(X, Y)$, X *compact. Khi đó,* F *là compact tương đối khi và chỉ khi:*

i) F *đồng liên tục;*

ii) Với mỗi $a \in X$, *tập* $F(a) = \{f(a) : f \in F\}$ *compact tương đối trong* Y.

Định lí 1.9. *[3, 32] (****Định lý điểm bất động Schauder cho không gian metric nửa tuyến tính****). Cho* B *là tập con lồi, đóng, bị chặn, khác rỗng của không gian metric nửa tuyến tính* $C(U, E_c)$ *và* $P : B \to B$ *là toán tử compact. Khi đó,* P *có ít nhất một điểm bất động trong* B.

Kết luận Chương 1

Chương 1 cung cấp các kiến thức cơ sở cần thiết cho nội dung chính của luận án ở những chương tiếp theo. Những kiến thức về tập mờ, số mờ trong chương này chủ yếu được hình thành từ những phép toán trên tập mức α. Các khái niệm về tính liên tục, khả vi và khả tích của hàm mờ được dựa trên lý thuyết về hàm giá trị tập. Một số kết quả khác của lý thuyết số mờ và giải tích bậc phân số cho các hàm mờ có trong các bài báo [6, 9, 25, 37, 59].

Chương 2
BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC MỜ CÓ TRỄ

Phương trình vi phân có trễ đóng vai trò quan trọng trong một số mô hình sinh học và vật lý kỹ thuật [26, 36]. Trong những năm gần đây, phương trình vi phân mờ có trễ được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu [31, 39, 40]. Tuy nhiên, các kết quả cho phương trình đạo hàm riêng mờ có trễ vẫn là bài toán bỏ ngỏ, chưa được nghiên cứu đến.

Trong chương này, tương ứng với hai trường hợp của đạo hàm Hukuhara suy rộng, chúng tôi định nghĩa hai kiểu nghiệm tích phân của bài toán biên đối với phương trình hyperbolic mờ có trễ. Kiểu nghiệm thứ nhất ứng với khái niệm đạo hàm Hukuhara thông thường với bán kính tập mức tăng. Kiểu nghiệm thứ hai ứng với trường hợp bán kính tập mức giảm của đạo hàm Hukuhara suy rộng. Kết quả này là mới và có ý nghĩa trong việc nghiên cứu các tính chất định tính của nghiệm khi biến tự do tiến ra vô hạn.

Bằng cách áp dụng định lý điểm bất động trong những không gian metric đầy thích hợp, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán trên miền bị chặn (Định lý 2.1 và 2.2) và trên miền vô hạn (Định lý 2.3 và 2.4). Một số ví dụ minh họa được chúng tôi trình bày trong phần cuối chương.

Nội dung của chương được trình bày dựa trên bài báo số 1 và số 2 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. Bài toán biên đối với phương trình hyperbolic mờ có trễ trên miền bị chặn

2.1.1. Đặt bài toán

Xét phương trình hyperbolic mờ có trễ

$$D_{xy}u(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}),\ J_{ab} = [0,a] \times [0,b] \tag{2.1}$$

cùng với điều kiện biên địa phương:

$$u(x,0) = \eta_1(x), x \in [0,a],\ \ u(0,y) = \eta_2(y), y \in [0,b] \tag{2.2}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \tilde{J}_r^{ab} := J_r^{ab} \setminus (0,a] \times (0,b] \tag{2.3}$$

trong đó $r > 0, J_r^{ab} = [-r,a] \times [-r,b], J_r^0 = [-r,0] \times [-r,0],\ f : J_{ab} \times C(J_r^0, E) \to E$, $\varphi \in C(\tilde{J}_r^{ab}, E)$, $\eta_1 \in C([0,a],E), \eta_2 \in C([0,b],E)$ là các hàm cho trước sao cho $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \varphi(0,0) = u(0,0)$, $\eta_2(y) \ominus_H u(0,0), \eta_1(x) \ominus_H u(0,0) \in E$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$, và hàm trễ $u_{(x,y)} : J_r^0 \to E$ được xác định bởi

$$u_{(x,y)}(s,t) = u(x+s, y+t)\ \text{với mọi}\ (s,t) \in J_r^0.$$

Trên không gian $C(J_r^0, E)$ gồm các hàm liên tục $\varphi : J_r^0 \to E$, ta xây dựng metric d_C^0 được xác định bởi

$$d_C^0(\varphi, \phi) = \sup_{(\omega,\theta) \in J_r^0} d_\infty(\varphi(\omega,\theta), \phi(\omega,\theta))$$

với $\varphi, \phi \in C(J_r^0, E)$.

Nhận xét 2.1. Nếu hiệu Hukuhara $\eta_1(x) \ominus_H u(0,0)$ và $\eta_2(y) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại với mọi $x \in [0,a], y \in [0,b]$ thì từ Mệnh đề 1.2 ta có thể thấy rằng

$$\eta_2(y) \oplus [\eta_1(x) \ominus_H u(0,0)] = \eta_1(x) \oplus [\eta_2(y) \ominus_H u(0,0)],\ \forall (x,y) \in J_{ab}.$$

Do đó, để thuận tiện ta kí hiệu

$$\psi(x,y) = \eta_1(x) \oplus [\eta_2(y) \ominus_H u(0,0)],\ (x,y) \in J_{ab}. \tag{2.4}$$

2.1.2. Nghiệm tích phân

Bổ đề 2.1. *Nếu* $f : J_{ab} \times C(J_r^0, E) \to E$ *và* $u : J_r^{ab} \to E$ *là các hàm liên tục thì hàm* $(x, y) \mapsto f(x, y, u_{(x,y)})$ *từ* J_{ab} *đến* E *cũng liên tục.*

Chứng minh. Cố định $(x_0, y_0, \varphi) \in J_{ab} \times C(J_r^0, E)$. Vì f là liên tục trên $J_{ab} \times C(J_r^0, E)$ nên với $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho với mỗi $(x, y, \psi) \in J_{ab} \times C(J_r^0, E)$ thỏa mãn $|x - x_0| + |y - y_0| + d_C^0(\psi, \varphi) < \delta_1$ thì ta có

$$d_\infty(f(x, y, \psi), f(x_0, y_0, \varphi)) < \varepsilon.$$

Vì u là liên tục trên J_r^{ab} nên u liên tục đều trên miền chữ nhật

$$\hat{I} = [\max\{-r, x_0 - r - \delta_1\}, x_0 + \delta_1] \times [\max\{-r, y_0 - r - \delta_1\}, y_0 + \delta_1].$$

Tức là, tồn tại δ_2 sao cho nếu $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in \hat{I}$ thỏa mãn $|x^1 - x^2| + |y^1 - y^2| < \delta_2$ thì

$$d_\infty(u(x^1, y^1), u(x^2, y^2)) < \frac{\delta_1}{4}.$$

Đặt $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{4}, \frac{\delta_2}{2}\}$. Do đó, với mọi $(x, y) \in J_{ab}$ thỏa mãn

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta \leq \frac{\delta_1}{4} \tag{2.5}$$

ta có $(x_0 + \theta, y_0 + \theta') \in \hat{I}$ và $(x + \theta, y + \theta') \in \hat{I}$ với mọi $(\theta, \theta') \in J_r^0$.
Mặt khác, vì

$$|(x + \theta) - (x_0 + \theta)| + |(y + \theta') - (y_0 + \theta')| = |x - x_0| + |y - y_0| < 2\delta \leq \delta_2$$

nên ta có

$$d_C^0(u_{(x,y)}, u_{(x_0,y_0)}) = \sup_{(\theta,\theta') \in J_r^0} d_\infty(u_{(x,y)}(\theta, \theta'), u_{(x_0,y_0)}(\theta, \theta')) < \frac{\delta_1}{4}. \tag{2.6}$$

Từ (2.5) và (2.6) ta suy ra rằng

$$|x - x_0| + |y - y_0| + d_C^0(u_{(x,y)}, u_{(x_0,y_0)}) < \frac{3\delta_1}{4} < \delta_1.$$

Vì f là liên tục nên $d_\infty(f(x, y, u_{(x,y)}), f(x_0, y_0, u_{(x_0,y_0)})) < \varepsilon$. Và do đó, $(x, y) \mapsto f(x, y, u_{(x,y)})$ là liên tục. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 2.1. *Giả sử* $f \in C(J_{ab} \times C(J_r^0, E), E)$ *và* $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(J_r^{ab}, E) \cup \mathcal{W}_2(J_r^{ab}, E)$ *là hàm mờ thỏa mãn (2.1)- (2.2). Khi đó,* $u(.,.)$ *thỏa mãn một trong các phương trình tích phân sau*

$$u(x,y) = \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds \tag{2.7}$$

hoặc

$$u(x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1) \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds \tag{2.8}$$

với mọi $(x,y) \in J_{ab}$.

Chứng minh. Giả sử $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(J_r^{ab}, E) \cup \mathcal{W}_2(J_r^{ab}, E)$ là hàm mờ thỏa mãn (2.1)- (2.2). Từ Bổ đề 2.1, ta có $f(x,y,u_{(x,y)})$ liên tục trên J_{ab}. Do đó, $f(x,y,u_{(x,y)})$ khả tích trên J_{ab}.

Trường hợp 1. $u \in \mathcal{W}_1(J_r^{ab}, E)$.

(a) Nếu u là gH-khả vi kiểu (i) theo x và $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi kiểu (i) theo y thì theo Mệnh đề 1.6 ta có

$$\int_0^x \Big[\int_0^y \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big)dt\Big]ds = \int_0^x \Big[\frac{\partial u}{\partial s}(s,y) \ominus_H \frac{\partial u}{\partial s}(s,0)\Big]ds.$$

Do đó

$$\int_0^x \Big[\frac{\partial u}{\partial s}(s,y) \ominus_H \frac{\partial u}{\partial s}(s,0)\Big]ds = \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right)dtds.$$

Điều này suy ra

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial s}(s,y)ds = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial s}(s,0)ds \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right)dtds.$$

Hơn nữa, vì u là gH-khả vi kiểu (i) theo x, nên ta có

$$u(x,y) \ominus_H u(0,y) = u(x,0) \ominus_H u(0,0) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right)dtds$$

hay

$$u(x,y) = u(0,y) \oplus [u(x,0) \ominus_H u(0,0)] \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right)dtds.$$

Kết hợp với điều kiện (2.2) ta được

$$u(x,y) = \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds \text{ với } (x,y) \in J_{ab}.$$

(b) Nếu u là khả vi kiểu (ii) theo x và $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ là khả vi kiểu (ii) theo y thì theo Mệnh đề 1.6 ta có

$$\int_0^x \left[(-1)\frac{\partial u}{\partial s}(s,0) \ominus_H (-1)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y)\right] ds = \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds$$

hay

$$\int_0^x (-1)\frac{\partial u}{\partial s}(s,0) ds = \int_0^x (-1)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y) ds \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds.$$

Mặt khác, vì u là gH-khả vi kiểu (ii) theo x nên ta có

$$\begin{aligned}
&u(0,0) \ominus_H u(x,0) = u(0,y) \ominus_H u(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds \\
\Leftrightarrow\ &u(0,0) = u(x,0) \oplus [u(0,y) \ominus_H u(x,y)] \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds \\
\Leftrightarrow\ &u(0,y) = u(x,y) \oplus u(0,0) \ominus_H \left[u(x,0) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds\right].
\end{aligned}$$

Do đó

$$u(x,y) = \eta_2(y) \ominus_H \left[u(0,0) \ominus_H \left(\eta_1(x) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds\right)\right].$$

Bởi giả thiết $\eta_2(y) \ominus_H u(0,0)$ và $\eta_1(x) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại, từ Mệnh đề 1.2 ta suy ra

$$u(x,y) = \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds,\ (x,y) \in J_{ab}.$$

Trường hợp 2. $u \in \mathcal{W}_2(J_r^{ab}, E)$.

Đầu tiên, ta xét trường hợp u là gH-khả vi kiểu (ii) theo x và $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi kiểu (i) theo y. Tương tự như trong **Trường hợp 1**, ta có

$$u(0,y) \ominus_H u(x,y) = u(0,0) \ominus_H u(x,0) \oplus (-1) \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds$$

$$\Leftrightarrow u(0,y) = u(x,y) \oplus u(0,0) \ominus_H u(x,0) \oplus (-1) \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds$$

$$\Leftrightarrow u(x,y) = \eta_2(y) \ominus_H \left[u(0,0) \ominus_H \eta_1(x) \oplus (-1) \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds\right]$$

Hơn nữa, vì các hiệu $\eta_2(y) \ominus_H u(0,0)$ và $\eta_1(x) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại nên ta có

$$u(x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1) \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds.$$

Lập luận tương tự, trong trường hợp u là gH-khả vi kiểu (i) theo x và $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi kiểu (ii) theo y, ta cũng nhận được kết quả tương tự. □

Từ Mệnh đề 2.1, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in C(J_r^{ab}, E)$ được gọi là

1) nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.1) - (2.3) nếu $u(x,y) = \varphi(x,y)$ với mọi $(x,y) \in \tilde{J}_r^{ab}$ và thỏa mãn phương trình tích phân (2.7) với mọi $(x,y) \in J_{ab}$.

2) nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (2.1) - (2.3) nếu $u(x,y) = \varphi(x,y)$ với mọi $(x,y) \in \tilde{J}_r^{ab}$ và thỏa mãn phương trình tích phân (2.8) với mọi $(x,y) \in J_{ab}$.

2.1.3. Tính giải được của bài toán

Định lí 2.1. *Giả sử $f \in C(J_{ab} \times C(J_r^0, E), E)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ 3, tức là tồn tại số dương L sao cho*

$$d_\infty(f(x,y,\phi_1), f(x,y,\phi_2)) \le L d_C^0(\phi_1,\phi_2) \tag{2.9}$$

với mọi $\phi_1, \phi_2 \in C(J_r^0, E)$, $(x,y) \in J_{ab}$. Khi đó, bài toán (2.1)-(2.3) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 trên J_r^{ab}.

Chứng minh. Kí hiệu $C_\lambda(J_r^{ab}, E)$ không gian các hàm $u \in C(J_r^{ab}, E)$ sao cho $u(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \tilde{J}_r^{ab}$, cùng với metric có trọng H_λ xác định bởi

$$H_\lambda(u,v) = \sup_{(x,y)\in J_r^{ab}} \left\{ d_\infty(u\,(x,y)\,, v\,(x,y)) e^{-\lambda(x+y)} \right\}$$

với mọi $u, v \in C(J_r^{ab}, E)$ và $\lambda > 0$ được chọn sau đó. Vì $(C(J_r^{ab}, E), H)$ là không gian metric đầy đủ nên dễ thấy rằng $\big(C_\lambda(J_r^{ab}, E), H_\lambda\big)$ cũng là không gian metric đầy đủ với mỗi $\lambda > 0$.

Với $u \in C_\lambda(J_r^{ab}, E)$, ta đặt $N_1(u(x,y)) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \tilde{J_r^{ab}}$ và

$$N_1(u(x,y)) = \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f\left(s,t,u_{(s,t)}\right) dtds,\ (x,y) \in J_{ab}.$$

Khi đó, ta có $N_1 u \in C_\lambda(J_r^{ab}, E)$.

Mặt khác, vì f thỏa mãn điều kiện Lipschitz (2.9) và từ tính chất $ii)$ của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3, ta có:

$$\begin{aligned} d_\infty(N_1(u(x,y)), N_1(v(x,y))) &\le \int_0^x \int_0^y d_\infty(f(s,t,u_{(s,t)}), f(s,t,v_{(s,t)}))dtds \\ &\le \int_0^x \int_0^y L d_C^0(u_{(s,t)}, v_{(s,t)})dtds \end{aligned}$$

với mọi $(x,y) \in J_{ab}$, $u, v \in C_\lambda(J_r^{ab}, E)$. Từ định nghĩa metric d_C^0, ta suy ra

$$\begin{aligned} &d_\infty(N_1(u(x,y)), N_1(v(x,y))) \\ &\qquad \le L \int_0^x \int_0^y \sup_{(\omega,\theta)\in J_r^0} d_\infty(u(s+\omega, t+\theta), v(s+\omega, t+\theta))dtds \\ &\qquad \le L \int_0^x \int_0^y \sup_{(\omega',\theta')\in[s-r,s]\times[t-r,t]} d_\infty(u(\omega',\theta'), v(\omega',\theta'))dtds. \end{aligned}$$

Hơn nữa, với mọi $(\omega', \theta') \in [x-r, x] \times [y-r, y]$, ta có

$$d_\infty(u(\omega',\theta'), v(\omega',\theta')) \le H_\lambda(u,v)e^{\lambda(\omega'+\theta')} \le H_\lambda(u,v)e^{\lambda(x+y)}.$$

Điều này suy ra

$$\sup_{(\omega,\omega')\in[x-r,x]\times[y-r,y]} d_\infty(u(\omega,\omega'), v(\omega,\omega')) \le H_\lambda(u,v)e^{\lambda(x+y)}.$$

Do đó, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} d_\infty(N_1(u(x,y)), N_1(v(x,y))) &\le L \int_0^x \int_0^y H_\lambda(u,v)e^{\lambda(s+t)}dtds \\ &\le \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v)e^{\lambda(x+y)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với $e^{-\lambda(x+y)}$ ta được

$$e^{-\lambda(x+y)}d_\infty(N_1(u(x,y)),N_1(v(x,y))) \le \frac{L}{\lambda^2}H_\lambda(u,v).$$

Trường hợp $(x,y) \in \tilde{J}_r^{ab}$ ta có $d_\infty(N_1(u(x,y)),N_1(v(x,y))) = 0$. Như vậy, với mọi $u,v \in C_\lambda(J_r^{ab},E)$ ta có

$$H_\lambda(N_1(u),N_1(v)) \le \frac{L}{\lambda^2}H_\lambda(u,v)$$

và do đó, với $\lambda > \sqrt{L}$, N_1 là ánh xạ co. Theo Định lý 1.7, N_1 có điểm bất động duy nhất. Điểm bất động u của N_1 là nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.1)-(2.3). Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.1) - (2.3) được đảm bảo bởi điều kiện Lipschitz (2.9). Tuy nhiên, như chúng ta đã biết, đường kính nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán luôn tăng. Do đó, việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 là cần thiết.

Với mọi $(x,y) \in J_{ab}$, để đơn giản, ta đặt

$$T_\psi^f[u](x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1)\int_0^x\int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds.$$

Xét tập $C_{\lambda,\psi}^f(J_r^{ab},E)$ gồm tất cả các hàm $u \in C_\lambda(J_r^{ab},E)$ sao cho $T_\psi^f[u](x,y) \in E$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$. Tính đầy đủ của không gian metric $\left(C_{\lambda,\psi}^f(J_r^{ab},E),H_\lambda\right)$ được chứng minh chi tiết trong bổ đề sau.

Bổ đề 2.2. *Nếu $f : J_{ab}\times C(J_r^0,E) \to E$ là một hàm liên tục và $C_{\lambda,\psi}^f(J_r^{ab},E) \neq \emptyset$ thì $(C_{\lambda,\psi}^f(J_r^{ab},E),H_\lambda)$ là không gian metric đầy đủ.*

Chứng minh. Giả sử $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ là một dãy trong $C_{\lambda,\psi}^f(J_r^{ab},E)$ hội tụ tới u. Khi đó, với mọi $(x,y) \in J_{ab}$ ta có $T_\psi^f[u^m(x,y)] \in E$. Đặt

$$g(u(x,y)) = (-1)\int_0^x\int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds.$$

Từ Mệnh đề 1.1, ta thấy rằng với mỗi $(x,y) \in J_{ab}$ cố định, ta có

$$\begin{cases} len[\psi(x,y)]^\alpha \geq len[g(u^m(x,y))]^\alpha, \ 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (\psi(x,y))^-_\alpha - (g(u^m(x,y)))^-_\alpha \text{ đơn điệu tăng theo } \alpha \in [0,1], \\ (\psi(x,y))^+_\alpha - (g(u^m(x,y)))^+_\alpha \text{ đơn điệu giảm theo } \alpha \in [0,1]. \end{cases}$$

Vì f liên tục và $\{u^m\}_{m=1}^\infty \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$ hội tụ đều tới u nên

$$len\Big[\int_0^x \int_0^y f(s,t,u^m_{(s,t)})dtds\Big]^\alpha$$

hội tụ tới

$$len\Big[\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds\Big]^\alpha$$

với mỗi $\alpha \in [0,1], (x,y) \in J_{ab}$. Do đó, $len[g(u^m(x,y))]^\alpha$ hội tụ tới $len[g(u(x,y))]^\alpha$. Mặt khác, với mỗi $(x,y) \in J_{ab}$ cố định, ta có $len[\psi(x,y)]^\alpha \geq len[g(u^m(x,y))]^\alpha$ với mọi $0 \leq \alpha \leq 1$ nên lấy giới hạn khi $n \to \infty$ ta được $len[\psi(x,y)]^\alpha \geq len[g(u(x,y))]^\alpha$ với mọi $0 \leq \alpha \leq 1$. Hơn nữa, với $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1$ bất kì, ta có

$$(\psi(x,y))^-_\alpha - (g(u^m(x,y)))^-_\alpha \leq (\psi(x,y))^-_\gamma - (g(u^m(x,y)))^-_\gamma.$$

Lấy giới hạn khi $m \to \infty$ và lập luận tương tự trên ta được:

$$(\psi(x,y))^-_\alpha - (g(u(x,y)))^-_\alpha \leq (\psi(x,y))^-_\gamma - (g(u(x,y)))^-_\gamma$$

và $(\psi(x,y))^+_\alpha - (g(u(x,y)))^+_\alpha \geq (\psi(x,y))^+_\gamma - (g(u(x,y)))^+_\gamma$, $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1$. Áp dụng Mệnh đề 1.1, ta suy ra $T^f_\psi[u](x,y) \in E$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$.

Trường hợp $(x,y) \in \tilde{J}^{ab}_r$, vì $u^m(x,y) = \varphi(x,y)$ nên $u(x,y) = \varphi(x,y)$. Do đó, $u \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$. Điều này có nghĩa $C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$ là một tập con đóng của $C_\lambda(J^{ab}_r, E)$. Vì $(C_\lambda(J^{ab}_r, E), H_\lambda)$ là một không gian metric đầy đủ nên $(C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E), H_\lambda)$ cũng là một không gian metric đầy đủ. Bổ đề được chứng minh. □

Định lí 2.2. *Giả sử $f \in C(J_{ab} \times C(J^0_r, E), E)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (2.9). Hơn nữa, ta giả sử rằng* *(i)* $C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E) \neq \emptyset$ *và*

(ii) nếu $u \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$ *thì* $T^f_\psi[u](x,y) \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E), (x,y) \in J_{ab}$.

Khi đó, bài toán (2.1)-(2.3) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 2 trên J^{ab}_r.

Chứng minh. Từ giả thiết ta thấy rằng tồn tại $u \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$ sao cho $T^f_\psi[u](x,y) \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$. Khi đó, ta xây dựng ánh xạ

$$N_2 : C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E) \to C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$$

xác định bởi $N_2(u(x,y)) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \tilde{J}^{ab}_r$ và

$$N_2(u(x,y)) = \psi(x,y) \ominus_H (-1) \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds,\ (x,y) \in J_{ab}.$$

Từ tính chất iv) của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3, ta có

$$d_\infty(N_2u(x,y),\ N_2v(x,y)) \leq \int_0^x \int_0^y d_\infty\left(f(s,t,u_{(s,t)}), f(s,t,v_{(s,t)})\right) dtds.$$

Lặp lại lập luận tương tự như trong chứng minh (2.10) ta được kết quả

$$d_\infty(N_2u(x,y),\ N_2v(x,y)) \leq \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v) e^{\lambda(x+y)}.$$

Mặt khác, nếu $(x,y) \in \tilde{J_r}^{ab}$ thì $d_\infty(N_2(u(x,y)), N_2(v(x,y))) = 0$. Do đó, với mọi $(x,y) \in J^{ab}_r$ ta có bất đẳng thức

$$e^{-\lambda(x+y)} d_\infty(N_2(u(x,y)), N_2(v(x,y))) \leq \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v).$$

Điều này có nghĩa

$$H_\lambda(N_2(u), N_2(v)) \leq \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v)$$

với mọi $u, v \in C^f_{\lambda,\psi}(J^{ab}_r, E)$. Vì vậy, N_2 là một ánh xạ co khi $\lambda > \sqrt{L}$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.3. Một trong những điều kiện để tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 là tồn tại $u(x,y) \in E$ để $T^f_\psi[u](x,y) \in E$. Trong phần sau chúng tôi chỉ ra một lớp các hàm mờ thỏa mãn điều kiện này.

Kí hiệu $\mathcal{T}$ là tập tất cả các số mờ tam giác (xem Ví dụ 1.4 chương 1). Giả sử $u = (u_0^-, u^1, u_0^+), v = (v_0^-, v^1, v_0^+) \in \mathcal{T}$. Khi đó, Bede và Stefanini [14] đã đưa ra điều kiện cho sự tồn tại hiệu Hukuhara $u \ominus_H v$ như sau.

Mệnh đề 2.2. *[13] Nếu $u, v \in \mathcal{T}$ và $len[v]^0 \leq \min\{u^1 - u_0^-, u_0^+ - u^1\}, \alpha \in [0,1]$ thì hiệu Hukuhara $u \ominus_H v$ tồn tại.*

Nhận xét 2.4. Dễ thấy với mọi $v \in \mathcal{T}$, ta có $len[v]^0 = v_0^+ - v_0^- \leq |v_0^+| + |v_0^-|$ và $d_\infty(v, \hat{0}) = \max\left\{|v_0^+|, |v_0^-|\right\}$. Do đó $len[v]^0 \leq 2d_\infty(v, \hat{0})$ với mọi $v \in \mathcal{T}$.

Mệnh đề 2.3. *Giả sử rằng hàm $f : J_{ab} \times C(J_r^0 \times \mathcal{T}) \to \mathcal{T}$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (2.9). Hơn nữa, với mọi $(x, y) \in J_{ab}$, ta giả sử $\psi(x, y) \in \mathcal{T}$ và tồn tại $\lambda_0 > 0$ sao cho*

$$z(x, y) \geq \frac{2L}{\lambda_0^2} e^{\lambda_0(x+y)} H_{\lambda_0}(u, \tilde{0}),$$

trong đó $z(x, y) = \min\{(\psi(x, y))^1 - (\psi(x, y))_0^-, (\psi(x, y))_0^+ - (\psi(x, y))^1\}$. Khi đó, $T_\psi^f[u](x, y) \in E$ với mọi $(x, y) \in J_{ab}$.

Chứng minh. Đặt $v(x, y) = (-1) \displaystyle\int_0^x \int_0^y f(s, t, u_{(s,t)}) dtds$ với mọi $(x, y) \in J_{ab}$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}
len[v(x, y)]^0 &\leq 2d_\infty(v(x, y), \hat{0}) \leq 2d_\infty\Big(\int_0^x \int_0^y f(s, t, u_{(s,t)}) dtds, \hat{0}\Big) \\
&\leq 2L \int_0^x \int_0^y d_C^0(u_{(s,t)}, \hat{0}) dtds \\
&\leq 2L \int_0^x \int_0^y \sup_{(\theta,\theta') \in J} d_\infty(u(s+\theta, t+\theta'), \hat{0}) dtds \\
&\leq 2L \int_0^x \int_0^y \sup_{(\omega,\omega') \in [s-r,s] \times [t-r,t]} d_\infty(u(\omega, \omega'), \hat{0}) dtds.
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự bất đẳng thức (2.10) ta được

$$len[v(x, y)]^0 \leq \frac{2L}{\lambda^2} e^{\lambda(x+y)} H_\lambda(u, \tilde{0}) \text{ với mọi } \lambda > 0.$$

Mặt khác, theo giả thiết tồn tại $\lambda_0 > 0$ sao cho

$$\frac{2L}{\lambda_0^2} e^{\lambda_0(x+y)} H_{\lambda_0}(u, \tilde{0}) \leq z(x, y),\ (x, y) \in J_{ab}$$

nên ta suy ra $len[v(x,y)]^0 \leq z(x,y),\ (x,y) \in J_{ab}$. Do đó, theo Mệnh đề 2.2, hiệu Hukuhara $\psi(x,y) \ominus_H (-1)\displaystyle\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds$ tồn tại với mọi $(x,y) \in J_{ab}$. Điều này có nghĩa $T_\psi^f[u](x,y) \in E$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.5. Trong không gian $C(J_r^{ab}, E)$, các metric H và H_λ là tương đương. Do đó, chúng ta có thể sử dụng cả hai metric này để nghiên cứu tính giải được của bài toán (2.1)-(2.3). Tuy nhiên, điều này không còn đúng khi ta xét bài toán trên miền vô hạn. Vấn đề được đặt ra là trong miền vô hạn $J_r^\infty = [-r,\infty) \times [-r,\infty)$, khi nào bài toán (2.1) - (2.3) có duy nhất nghiệm? Câu trả lời được chúng tôi trình bày cụ thể trong phần sau.

2.2. Bài toán biên đối với phương trình hyperbolic mờ có trễ trên miền vô hạn

2.2.1. Đặt bài toán

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu phương trình hyperbolic mờ có trễ trên miền vô hạn

$$D_{xy}u(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}),\ (x,y) \in J_0^\infty = [0,\infty) \times [0,\infty) \tag{2.11}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(x,0) = \eta_1(x),\ \ x \in [0,\infty),\ \ u(0,y) = \eta_2(y),\ \ y \in [0,\infty) \tag{2.12}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \tilde{J}_r^\infty := J_r^\infty \setminus (0,\infty) \times (0,\infty) \tag{2.13}$$

trong đó $J_r^\infty = [-r,\infty) \times [-r,\infty), r > 0, f : J_0^\infty \times C(J_r^0, E) \to E$, $\eta_1, \eta_2 \in C([0,\infty), E)$, $\varphi \in C(\tilde{J}_r^\infty, E)$ là các hàm cho trước sao cho $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \varphi(0,0) = u(0,0)$ và $\eta_2(y) \ominus_H u(0,0), \eta_1(x) \ominus_H u(0,0) \in E$ với mọi $x, y \in [0,\infty)$.

2.2.2. Nghiệm tích phân

Mệnh đề sau giúp chúng ta chuyển bài toán (2.11)-(2.13) sang bài toán tích phân. Kết quả trong mệnh đề đảm bảo cho Định nghĩa 2.2 được trình bày ở phần sau có nghĩa.

Mệnh đề 2.4. *Giả sử* $f : J_0^\infty \times C(J_r^0, E) \to E$ *là một hàm liên tục và* $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(J_r^\infty, E) \cup \mathcal{W}_2(J_r^\infty, E)$ *thỏa mãn (2.11)-(2.13). Khi đó* $u(.,.)$ *thỏa mãn một trong các phương trình tích phân sau*

$$u(x,y) = \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds \tag{2.14}$$

hoặc

$$u(x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1) \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds \tag{2.15}$$

với mọi $(x,y) \in J_0^\infty$.

Chứng minh. Giả sử $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(J_r^\infty, E) \cup \mathcal{W}_2(J_r^\infty, E)$ thỏa mãn (2.11)-(2.13). Chứng minh tương tự Bổ đề 2.1, ta có $f(x,y,u_{(x,y)})$ liên tục trên J_0^∞. Do đó, $f(x,y,u_{(x,y)})$ khả tích trên J_0^∞. Lấy tích phân hai vế phương trình (2.11) trên $[0,y]$ ta được

$$\int_0^y D_{xt}u(x,t)dt = \int_0^y f(x,t,u_{(x,t)})dt.$$

Tiếp tục lập luận tương tự Mệnh đề 2.1, ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 2.2. Một hàm $u \in C(J_r^\infty, E)$ được gọi là

1) nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.11)-(2.13) nếu $u(x,y) = \varphi(x,y)$ với $(x,y) \in \tilde{J}_r^\infty$ và thỏa mãn phương trình tích phân (2.14) với mọi $(x,y) \in J_0^\infty$;

2) nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (2.11)-(2.13) nếu $u(x,y) = \varphi(x,y)$ với $(x,y) \in \tilde{J}_r^\infty$ và thỏa mãn phương trình tích phân (2.15) với mọi $(x,y) \in J_0^\infty$.

2.2.3. Tính giải được của bài toán

Để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (2.11)-(2.13), ta giả thiết hàm f và các hàm η_1, η_2 thỏa mãn các điều kiện sau:

($\mathbf{A_1}$) Hàm $f : J_0^{\infty} \times C(J_r^0, E) \to E$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (2.9) và tồn tại các số thực dương M_1, c_1 sao cho

$$d_{\infty}(f(x, y, \hat{0}), \hat{0}) \le M_1 e^{c_1(x+y)} \text{ với mọi } (x, y) \in J_0^{\infty}.$$

($\mathbf{A_2}$) Với mọi $(x, y) \in J_0^{\infty}$, tồn tại các số thực dương M_i và c_i $(i = 2, 3)$ sao cho

$$d_{\infty}(\eta_1(x), \hat{0}) \le M_2 e^{c_2 x} \text{ và } d_{\infty}(\eta_2(y), \hat{0}) \le M_3 e^{c_3 y}.$$

Khi đó, với mỗi $\lambda > 0$, ta chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2.11)- (2.13) trên không gian $C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E)$ gồm tất cả các hàm $u \in C(J_r^{\infty}, E)$ sao cho $u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \tilde{J}_r^{\infty}$ và

$$\sup_{(x,y)\in J_r^{\infty}} d_{\infty}(u(x, y), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} < \infty.$$

Tính đầy đủ của không gian metric $(C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E), H_{\lambda})$ được chứng minh chi tiết trong bổ đề sau.

Bổ đề 2.3. *Với mỗi số thực $\lambda > 0$, $(C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E), H_{\lambda})$ là không gian metric đầy đủ.*

Chứng minh. Giả sử rằng $\{u_m\}_{m\ge1}$ là một dãy Cauchy trong $(C_{\lambda}^{\infty}(J_r^{\infty}, E), H_{\lambda})$.
Bước 1. Ta chứng minh dãy $\{u_m\}_{m\ge1}$ hội tụ.
Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \ge n_{\varepsilon}$ ta có $H_{\lambda}(u_m, u_n) < \varepsilon$. Do đó, với mọi $m, n \ge n_{\varepsilon}$ và $(x, y) \in J_r^{\infty}$, ta có

$$d_{\infty}(u_m(x, y), u_n(x, y)) < \varepsilon e^{\lambda(x+y)}. \tag{2.16}$$

Điều này có nghĩa với mỗi $(x, y) \in J_r^{\infty}$, $\{u_m(x, y)\}_{m\ge1}$ cũng là một dãy Cauchy trong E. Mặt khác, (E, d_{∞}) là không gian metric đầy đủ. Do đó, tồn tại $u(x, y) \in E$ sao cho

$$\lim_{m\to\infty} d_{\infty}(u_m(x, y), u(x, y)) = 0. \tag{2.17}$$

Với $(x, y) \in J_r^\infty$ cố định, lấy giới hạn (2.16) khi $m \to \infty$, kết hợp với (2.17), ta được

$$d_\infty(u_n(x, y), u(x, y)) < \varepsilon e^{\lambda(x+y)} \text{ với } n \geq n_\varepsilon, \tag{2.18}$$

hay $d_\infty(u_n(x, y), u(x, y))e^{-\lambda(x+y)} < \varepsilon$. Do đó

$$\sup_{(x,y)\in J_r^\infty} d_\infty(u_n(x, y), u(x, y))e^{-\lambda(x+y)} < \varepsilon,\ n \geq n_\varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ $H_\lambda(u_n, u) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$. Như vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} H_\lambda(u_n, u) = 0$.

Bước 2. Ta chỉ ra rằng $u \in C(J_r^\infty, E)$.

Cố định $(x_0, y_0) \in J_r^\infty$. Vì u_m liên tục trên J_r^∞ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in J_r^\infty$ thỏa mãn $|x - x_0| + |y - y_0| < \delta$ ta có

$$d_\infty(u_m(x, y), u_m(x_0, y_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $B_1 = \{(x, y) \in J_r^\infty : |x - x_0| + |y - y_0| < 1\}$ và $N = \max\limits_{(x,y)\in B_1} e^{\lambda(x+y)}$. Theo chứng minh **Bước 1**, với $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3N} > 0$, tồn tại $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m \geq n_{\varepsilon_1}$ ta có $H_\lambda(u_m, u) < \varepsilon_1$. Điều này có nghĩa

$$d_\infty(u_m(x, y), u(x, y)) < \varepsilon_1 e^{\lambda(x+y)} \text{ với mọi } (x, y) \in J_r^\infty.$$

Cố định $M \geq n_{\varepsilon_1}$ và đặt $\delta' = \min\{\delta, 1\}$. Khi đó, với $(x, y) \in B_{\delta'}$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(u_M(x, y), u(x, y)) &< \varepsilon_1 \max_{(x,y)\in B_{\delta'}} e^{\lambda(x+y)} \\ &\leq \varepsilon_1 \max_{(x,y)\in B_1} e^{\lambda(x+y)} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Và do đó, với mọi $(x, y) \in B_{\delta'}$, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} d_\infty(u(x, y), u(x_0,y_0)) &\leq d_\infty(u(x, y), u_M(x, y)) \\ &\quad + d_\infty(u_M(x, y), u_M(x_0, y_0)) + d_\infty(u_M(x_0, y_0), u(x_0, y_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ u là một hàm liên tục trên J_r^∞.

Bước 3. Ta chứng minh rằng $u \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$.

Khi $(x,y) \in \tilde{J}_r^\infty$, vì $u_m(x,y) = \varphi(x,y)$ nên $u(x,y) = \varphi(x,y)$. Ta cần chứng minh rằng $\sup\limits_{(x,y)\in J_r^\infty} d_\infty(u(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)} < \infty$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&d_\infty(u(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)}\\
&\qquad\le d_\infty(u(x,y),u_m(x,y))e^{-\lambda(x+y)} + d_\infty(u_m(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)}\\
&\qquad\le H_\lambda(u,u_m) + d_\infty(u_m(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)},\ \forall(x,y)\in J_r^\infty.
\end{aligned}$$

Vì $u_m \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ nên $\sup\limits_{(x,y)\in J_r^\infty} d_\infty(u_m(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)} < \infty$. Hơn nữa, $\lim\limits_{m\to\infty} H_\lambda(u,u_m) = 0$. Do đó, ta có

$$\sup_{(x,y)\in J_r^\infty} d_\infty(u(x,y),\hat{0})e^{-\lambda(x+y)} < \infty.$$

Như vậy, $u_m \to u \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ theo metric H_λ, do đó $(C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E), H_\lambda)$ là một không gian metric đầy đủ. Bổ đề được chứng minh. □

Nhận xét 2.6. Giả sử rằng hàm mờ f thỏa mãn giả thiết $(\mathbf{A_1})$. Khi đó, ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^y d_\infty(f(s,t,u_{(s,t)}),\hat{0})dtds\\
&\quad\le \int_0^x\int_0^y d_\infty(f(s,t,u_{(s,t)}),f(s,t,\hat{0}))dtds + \int_0^x\int_0^y d_\infty(f(s,t,\hat{0}),\hat{0})dtds\\
&\quad\le \int_0^x\int_0^y Ld_C^0(u_{(s,t)},\hat{0})dtds + \int_0^x\int_0^y M_1e^{c_1(s+t)}dtds\\
&\quad\le L\int_0^x\int_0^y d_C^0(u_{(s,t)},\hat{0})dtds + \frac{M_1}{c_1^2}e^{c_1(x+y)}, \forall(x,y)\in J_0^\infty.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Với $u \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$, tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$d_\infty(u(x,y),\hat{0}) \le \rho e^{\lambda(x+y)} \text{ với mọi } (x,y)\in J_r^\infty.$$

Khi đó, với mọi $(\theta, \theta') \in J_r^0$, $(s,t) \in J_0^\infty$, ta có

$$d_\infty(u(s+\theta, t+\theta'), \hat{0}) \le \rho e^{\lambda(s+t+\theta+\theta')} \le \rho e^{\lambda(s+t)}.$$

Do đó

$$d_C^0(u_{(s,t)}, \hat{0}) = \sup_{(\theta,\theta')\in J_r^0} d_\infty(u(s+\theta, t+\theta'), \hat{0}) \le \rho e^{\lambda(s+t)}, \forall (s,t) \in J_0^\infty. \quad (2.20)$$

Từ (2.19) và (2.20) ta suy ra

$$\int_0^x \int_0^y d_\infty(f(s,t,u_{(s,t)}), \hat{0}) dtds \le \frac{\rho L}{\lambda^2} e^{\lambda(x+y)} + \frac{M_1}{c_1^2} e^{c_1(x+y)}, \forall (x,y) \in J_0^\infty. \quad (2.21)$$

Nhận xét 2.7. Với mọi $u, v \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ và hàm mờ f thỏa mãn giả thiết $(\mathbf{A_1})$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty\Big(\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)}) dtds, \int_0^x \int_0^y f(s,t,v_{(s,t)}) dtds\Big) \\ \le L \int_0^x \int_0^y d_C^0(u_{(s,t)}, v_{(s,t)}) dtds,\ (x,y) \in J_0^\infty. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự (2.10) ta được

$$d_\infty\Big(\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)}) dtds, \int_0^x \int_0^y f(s,t,v_{(s,t)}) dtds\Big) \le \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v) e^{\lambda(x+y)} \quad (2.22)$$

với mọi $(x,y) \in J_0^\infty$.

Với $\varphi \in C(\tilde{J}_r^\infty, E)$, xét toán tử N_3 xác định bởi

$$N_3(u(x,y)) = \begin{cases} \psi(x,y) \oplus \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)}) dtds & \text{nếu } (x,y) \in J_0^\infty, \\ \varphi(x,y) & \text{nếu } (x,y) \in \tilde{J}_r^\infty. \end{cases} \quad (2.23)$$

Dễ thấy, u là một nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.11)-(2.13) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của toán tử N_3.

Bổ đề 2.4. *Giả sử rằng* $f \in C(J_0^\infty \times C(J_r^0, E), E)$ *và các giả thiết* $(\mathbf{A_1})-(\mathbf{A_2})$ *được thỏa mãn. Khi đó, với mọi* $\lambda > \max\{c_1, c_2, c_3, \sqrt{L}\}$, N_3 *là ánh xạ co trên* $C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$.

Chứng minh.

Bước 1. Ta chứng minh rằng $N_3(C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)) \subset C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$. Thật vậy, với mỗi $u \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ và $(x, y) \in J_0^\infty$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(N_3(u(x,y)), \hat{0}) &\le d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) + d_\infty\Big(\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds, \hat{0}\Big) \\ &\le d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) + \int_0^x \int_0^y d_\infty(f(s,t,u_{(s,t)}), \hat{0})dtds. \end{aligned}$$

Từ Nhận xét 2.6, công thức (2.21) ta có

$$d_\infty(N_3(u(x,y)), \hat{0}) \le d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) + \frac{\rho L}{\lambda^2} e^{\lambda(x+y)} + \frac{M_1}{c_1^2} e^{c_1(x+y)}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $e^{-\lambda(x+y)}$ ta được

$$d_\infty(N_3(u(x,y)), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} \le d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} + \frac{\rho L}{\lambda^2} + \frac{M_1}{c_1^2} e^{(c_1-\lambda)(x+y)} \tag{2.24}$$

Mặt khác, từ giả thiết $(\mathbf{A_2})$ và tính chất *ii*) trong Mệnh đề 1.3 ta suy ra

$$\begin{aligned} &d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} \\ &\qquad \le \Big[d_\infty(\eta_1(x), \hat{0}) + d_\infty(\eta_2(y), \hat{0}) + d_\infty(\varphi(0,0), \hat{0})\Big] e^{-\lambda(x+y)} \\ &\qquad \le M_2 e^{(c_2-\lambda)(x+y)} + M_3 e^{(c_3-\lambda)(x+y)} + d_\infty(\varphi(0,0), \hat{0}). \end{aligned}$$

Vì $\varphi(0,0) = u(0,0)$ và $\lambda > \max\{c_1, c_2, c_3\}$ nên ta có

$$d_\infty(\psi(x,y), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} \le M_2 + M_3 + \rho < \infty. \tag{2.25}$$

Kết hợp (2.24) và (2.25) ta thấy rằng

$$d_\infty(N_3(u(x,y)), \hat{0}) e^{-\lambda(x+y)} \le M_2 + M_3 + \rho + \frac{\rho L}{\lambda^2} + \frac{M_1}{c_1^2} < \infty, \ (x,y) \in J_0^\infty. \tag{2.26}$$

Trường hợp $(x,y) \in \tilde{J}_r^\infty$, ta có $N_3(u(x,y)) = \varphi(x,y)$. Do đó, $N_3(C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)) \subset C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$.

Bước 2. Trong bước này, ta chỉ ra rằng N_3 là một ánh xạ co trên $C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$.

Với mọi $u, v \in C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$, từ tính chất *ii*) trong Mệnh đề 1.3 và Nhận xét 2.7, công thức (2.22), ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(N_3(u(x,y)), &N_3(v(x,y))) \\ &\le d_\infty\Big(\int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds, \int_0^x \int_0^y f(s,t,v_{(s,t)})dtds\Big) \\ &\le L \int_0^x \int_0^y H_\lambda(u,v)e^{\lambda(s+t)}dtds \le \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v)e^{\lambda(x+y)} \end{aligned}$$

với mọi $(x,y) \in J_0^\infty$. Do đó

$$d_\infty(N_3(u(x,y)), N_3(v(x,y)))e^{-\lambda(x+y)} \le \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v), \forall (x,y) \in J_r^\infty.$$

Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned} H_\lambda(N_3(u), N_3(v)) &= \sup_{(x,y)\in J_r^\infty} d_\infty(N_3(u(x,y)), N_3(v(x,y)))e^{-\lambda(x+y)} \\ &\le \frac{L}{\lambda^2} H_\lambda(u,v). \end{aligned}$$

Vì $\lambda > \sqrt{L}$ nên $\dfrac{L}{\lambda^2} < 1$. Do đó, N_3 là ánh xạ co. □

Dựa trên các kết quả của Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.4, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.11)-(2.13) trong định lý sau.

Định lí 2.3. *Giả sử hàm $f : J_0^\infty \times C(J_r^0, E) \to E$ liên tục và các giả thiết $(\mathbf{A_1})-(\mathbf{A_2})$ đúng. Khi đó, tồn tại nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.11)-(2.13) trên J_r^∞ và nghiệm này là duy nhất trong không gian $C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ với $\lambda > 0$ đủ lớn.*

Chứng minh. Xét toán tử $N_3 : C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E) \to C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E)$ xác định bởi (2.23). Từ Bổ đề 2.3, ta thấy $(C_\lambda^\infty(J_r^\infty, E), H_\lambda)$ là một không gian metric đầy đủ với mọi $\lambda > 0$ và theo Bổ đề 2.4, $N_3 : C^{\infty}_{\lambda}(J^{\infty}_r, E) \to C^{\infty}_{\lambda}(J^{\infty}_r, E)$ là một ánh xạ co. Do đó, theo Định lý 1.7, ta suy ra tồn tại duy nhất $u \in C^{\infty}_{\lambda}(J^{\infty}_r, E)$ sao cho $N_3(u) = u$. Nói cách khác, u là nghiệm tích phân kiểu 1 duy nhất của bài toán. Định lý được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta xét bài toán (2.11)-(2.13) trong trường hợp u là hàm gH-khả vi kiểu 2 và với mỗi $\lambda > 0$, ta đặt

$$C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E) = \{u \in C^{\infty}_{\lambda}(J^{\infty}_r, E) : T^f_{\psi}[u](x,y) \in E \text{ với mọi } (x,y) \in J^{\infty}_0\}.$$

Định lý sau khẳng định sự tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán với bán kính nghiệm mờ giảm dần theo thời gian.

Định lí 2.4. *Giả sử $f \in C(J^{\infty}_0 \times C(J^0_r, E), E)$ và các giả thiết $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_2})$ thỏa mãn. Thêm vào đó, giả sử rằng*
(i) $C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E) \neq \emptyset$ và
(ii) nếu $u \in C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ thì $T^f_{\psi}[u](x,y) \in C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ với mọi $(x,y) \in J^{\infty}_0$.
Khi đó, tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (2.11)-(2.13) trên J^{∞}_r và nghiệm này là duy nhất trong không gian $C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ với $\lambda > 0$ đủ lớn.

Chứng minh. Từ giả thiết (i) và (ii), ta xây dựng ánh xạ

$$N_4 : C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E) \to C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$$

xác định bởi $N_4u(x,y) = \varphi(x,y)$ nếu $(x,y) \in \tilde{J}^{\infty}_r$ và

$$N_4u(x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1) \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{(s,t)})dtds \text{ nếu } (x,y) \in J^{\infty}_0.$$

Với $u \in C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ và $(x,y) \in J^{\infty}_0$ tùy ý, từ tính chất $iv)$ trong Mệnh đề 1.3, ta có

$$d_{\infty}(N_4(u(x,y)), \hat{0}) \leq d_{\infty}(\psi(x,y), \hat{0}) + \int_0^x \int_0^y d_{\infty}(f(s,t,u_{(s,t)}), \hat{0})dtds.$$

Chứng minh tương tự Bổ đề 2.4, ta được N_4 là ánh xạ co từ $C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ đến $C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$. Hơn nữa, chứng minh tương tự Bổ đề 2.2, ta có không gian

$\left(C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E), H_\lambda\right)$ là một không gian metric đầy đủ với mỗi số thực $\lambda > 0$. Do đó, tồn tại duy nhất hàm $u \in C^{\infty,f}_{\lambda,\psi}(J^{\infty}_r, E)$ sao cho $N_2 u = u$. Khi đó, u là một nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (2.11)-(2.13) trên J^{∞}_r. $\square$

Nhận xét 2.8. Như vậy, bằng cách áp dụng Nguyên lý ánh xạ co Banach trong các không gian metric thích hợp, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại hai kiểu nghiệm tích phân của bài toán (2.11)-(2.13) trên miền vô hạn J^{∞}_r, tương ứng với từng kiểu gH-khả vi khác nhau của đạo hàm Hukuhara suy rộng. Chứng minh tương tự Mệnh đề 2.3, ta cũng nhận được lớp các số mờ tam giác để đảm bảo cho $T^f_\psi[u](x,y) \in E$ với mọi $(x,y) \in J^{\infty}_0$.

2.3. Một số ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số ví dụ để minh họa cho các kết quả đã đạt được. Ở ví dụ đầu tiên, sau khi khẳng định sự tồn tại và duy nhất nghiệm, chúng tôi xây dựng nghiệm mờ bằng việc sử dụng lược đồ của Buckley - Feuring (xem [16]). Trong khi đó, ở ví dụ thứ hai, áp dụng phương pháp steps được đưa ra trong [26], chúng tôi có thể chỉ ra được cả hai loại nghiệm của bài toán.

Ví dụ 2.1. Xét phương trình hyperbolic mờ

$$D_{xy}u(x,y) = -e^8 u(x-4, y-4) \oplus (x+1)e^{2y}K,\ (x,y) \in J^{\infty}_0 \tag{2.27}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(x,0) = (x+3)K,\ u(0,y) = 3e^{2y}K,\ u(0,0) = 3K, (x,y) \in J^{\infty}_0 \tag{2.28}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,y) = (x+\frac{1}{4}xy-\frac{3}{4}x^2y+3)e^{2y}K,\ (x,y) \in \tilde{J}^{\infty}_4 = J^{\infty}_4 \backslash (0,\infty)\times(0,\infty) \tag{2.29}$$

trong đó K là một số mờ.

Từ phương trình (2.27), ta suy ra

$$f(x,y,u_{(x,y)}) = -e^8 u(x-4,y-4) \oplus (x+1)e^{2y}K$$

thỏa mãn điều kiện Lipschitz cùng với hằng số Lipschitz $L = e^8$ vì

$$d_\infty\big(f(x,y,u_{(x,y)}), f(x,y,v_{(x,y)})\big) \le e^8 d_C^0(u_{(x,y)}, v_{(x,y)}),\ (x,y) \in J_0^\infty.$$

Giả sử tập mức của số mờ K là $[K]^\alpha = [k^-(\alpha), k^+(\alpha)]$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x,y,\hat{0}),\hat{0}) &\le (x+1)e^{2y} \sup_{0\le\alpha\le1} \Big| k^-(\alpha) - k^+(\alpha) \Big| \\ &\le 2(x+1)e^{2y} \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha) \le e^{2(x+y)} \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ điều kiện $(\mathbf{A_1})$ được thỏa mãn với $c_1 = 2$ và $M_1 = \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha)$. Lập luận tương tự, ta được

$$d_\infty(\eta_1(x),\hat{0}) \le 6e^x \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha)$$

và $d_\infty(\eta_2(y),\hat{0}) \le 6e^{2y} \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha)$. Như vậy, điều kiện $(\mathbf{A_2})$ thỏa mãn với $c_2 = 1,\ c_3 = 2,\ M_2 = 6 \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha)$ và $M_3 = 6 \sup_{0\le\alpha\le1} k^+(\alpha)$.

Nếu ta chọn $\lambda > \max\{c_1, c_2, c_3, \sqrt{L}\} = e^4$ thì tất cả các điều kiện của Định lý 2.3 đều được thỏa mãn. Do đó, tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.27)-(2.29) trên J_4^∞.

Dễ thấy rằng trong trường hợp hàm được xét là hàm cổ điển thì $u(x,y) = k(x+3)e^{2y}$ là một nghiệm cổ điển của bài toán (2.27) - (2.29). Khi đó, sử dụng lược đồ của Buckley - Feuring (xem [16]), bằng cách mờ hóa nghiệm cổ điển dựa trên Nguyên lý suy rộng Zadeh (Định nghĩa 1.2, trang 17), chúng tôi tìm được một nghiệm mờ là nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.27)-(2.29) với tập mức là

$$[u(x,y)]^\alpha = (x+3)e^{2y}[k^-(\alpha), k^+(\alpha)], (x,y) \in J_4^\infty, \alpha \in [0,1].$$

Ví dụ 2.2. Xét phương trình đạo hàm riêng hyperbolic mờ

$$D_{xy}u(x,y) = -eu(x-1,y-1) \oplus xe^{y}(-1,0,1), (x,y) \in J_0^{\infty} \tag{2.30}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(x,0) = x(-1,0,1), x \in [0,\infty),\ u(0,y) = \hat{0},\ y \in [0,\infty) \tag{2.31}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,y) = x(y+1)(-1,0,1), (x,y) \in \tilde{J}_1^{\infty} := J_1^{\infty} \backslash (0,\infty) \times (0,\infty). \tag{2.32}$$

Trường hợp 1. $u \in \mathcal{W}_1(J_1^{\infty}, E)$.

Từ Nhận xét 1.3, ta có

$$[D_{xy}u(x,y)]^{\alpha} = \Big[\frac{\partial^2 u_{\alpha}^{-}}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u_{\alpha}^{+}}{\partial x \partial y}(x,y)\Big].$$

Khi đó, với mỗi điều kiện ban đầu cho trước, áp dụng phương pháp steps [26], ta tìm nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (2.30) - (2.32) trên miền $[0,n]^2$ với mọi $n \geq 2$. Cụ thể, trong bài toán này, sử dụng phương pháp steps chúng tôi tìm nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán trên $[0,2]^2$.

Đầu tiên, với $(x,y) \in [0,1]^2$, nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán được xác định bởi tập mức

$$[u(x,y)]^{\alpha} = \left(\frac{e}{4}y^2(x^2-2x) + \frac{x^2}{2}(e^y - 1) + x\right)[\alpha - 1, 1-\alpha].$$

Trường hợp $(x,y) \in [0,1] \times [1,2]$ hoặc $(x,y) \in [1,2] \times [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$, làm tương tự ta nhận được công thức nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán giống như trường hợp đầu tiên.

Cuối cùng, khi $(x,y) \in [1,2]^2$, $\alpha \in [0,1]$, ta sử dụng các nghiệm tìm được trong ba trường hợp trước như điều kiện ban đầu và thu được nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán được có tập mức xác định bởi

$$[u(x,y)]^\alpha = \Big(\frac{e^2}{36}(-x^3+6x^2-9x+4)(y-1)^3 + \frac{-x^3+6x^2-3x+1}{6}e^y + \frac{e}{6}(x^3-6x^2+9x-4)y + \frac{e}{4}[3(x-1)^2-y^2] - \frac{x^2}{2} + x\Big)[\alpha-1,1-\alpha].$$

Trường hợp 2. $u \in \mathcal{W}_2(J_1^\infty, E)$.

Từ Nhận xét 1.3, ta có

$$[D_{xy}u(x,y)]^\alpha = \Big[\frac{\partial^2 u_\alpha^+}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u_\alpha^-}{\partial x \partial y}(x,y)\Big].$$

Tương tự như trường hợp 1, với mỗi điều kiện ban đầu cho trước, áp dụng phương pháp steps, khi $(x,y) \in [0,1]^2$ hoặc $[0,1]\times[1,2]$ hoặc $[1,2]\times[0,1]$, ta tìm được nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán

$$[u(x,y)]^\alpha = \Big(\frac{e}{4}(x^2-2x)y^2 + \frac{x^2}{2}(e^y-1) - x\Big)[\alpha-1,1-\alpha], \quad \alpha \in [0,1]$$

và khi $(x,y) \in [1,2]^2$, ta được

$$[u(x,y)]^\alpha = \Big(\frac{e^2}{36}(x^3-6x^2+9x-4)(y-1)^3 + \frac{x^3+3x-1}{6}e^y - \frac{x^3-3x+2}{6}e^y + \frac{e}{4}[3(x-1)^2-y^2] - \frac{x^2}{2} - x\Big)[\alpha-1,1-\alpha],$$

với $\alpha \in [0,1]$.

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình hyperbolic mờ có trễ với điều kiện ban đầu địa phương dưới tính khả vi Hukuhara suy rộng trên miền bị chặn và trên miền vô hạn. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 và kiểu 2 trên miền bị chặn (Định lý 2.1 và Định lý 2.2).

2) Chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 và kiểu 2 trên miền vô hạn (Định lý 2.3 và Định lý 2.4).

3) Đưa ra lớp các số mờ tam giác đảm bảo sự tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (Mệnh đề 2.3).

4) Đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả đạt được. Áp dụng phương pháp steps được đưa ra trong [39] để tìm nghiệm mờ phương trình đạo hàm riêng hyperbolic mờ có trễ trong ví dụ cụ thể, trong đó ta có thể chỉ ra được cả hai nghiệm khả vi Hukuhara suy rộng kiểu (i) và kiểu (ii).

Các kết quả này là nền tảng cho việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận các nghiệm mờ, thích hợp cho việc mô phỏng sự truyền sóng đàn hồi hoặc sóng âm cùng với sự không chắc chắn trong môi trường động lực.

Chương 3

BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG MỜ DẠNG HYPERBOLIC BẬC PHÂN SỐ

Phương trình vi phân và tích phân bậc phân số được sử dụng để mô hình hóa cho nhiều tiến trình khác nhau trong vật lý, hóa học và kỹ thuật [34]. Một trong những công trình đầu tiên về phương trình vi phân mờ bậc phân số là của Agarwal và các cộng sự [4] và sau đó là của tác giả Arshad [9, 10] với khái niệm đạo hàm Riemann-Liouville mờ dựa trên hiệu Hukuhara giữa các tập mờ [28]. Lý thuyết về giải tích bậc phân số mờ đã được Salahshour, Ahmadian, Agarwal sử dụng để mô hình hóa một số bài toán thực tế [5, 52].

Từ năm 2010 đến nay, có nhiều công trình nghiên cứu về phương trình vi phân mờ bậc phân số dưới những khái niệm khả vi mờ khác nhau, như tính khả vi Hukuhara [4, 9, 10], tính khả vi Hukuhara suy rộng, đạo hàm Caputo [6, 27, 42]. Tuy nhiên theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có nhiều nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng mờ bậc phân số. Do đó, trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số.

Đầu tiên, dựa trên khái niệm tích phân Riemann - Liouville cho hàm hai biến giá trị thực và Định lý Stacking (Định lý 1.2), chúng tôi xây dựng khái niệm tích phân Riemann - Liouville cho hàm hai biến giá trị số mờ (Định nghĩa 3.2). Tính đúng đắn của khái niệm này được chứng minh chi tiết trong Bổ đề 3.3. Khái niệm đạo hàm Caputo dựa trên hiệu Hukuhara suy rộng được đưa ra trong Định nghĩa 3.3 dưới sự kết hợp của hai khái niệm: đạo hàm Hukuhara suy rộng và tích phân Riemann - Liouville. Một số ví dụ được đưa ra để minh họa cho các khái niệm này. Bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số được đưa ra trong Mục 3.2. Tương tự trong Chương 2, với giả thiết hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz, chúng tôi chứng minh được các kết quả về tính giải được duy nhất của bài toán trên miền bị chặn và trên miền vô hạn trong các Định lý 3.1, 3.2, 3.4 và Định lý 3.5. Hơn nữa, với giả thiết hàm f bị chặn (f có thể không Lipschitz), bằng cách sử dụng Định lý điểm bất động Schauder cho không gian metric nửa tuyến tính, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán trên miền bị chặn (Định lý 3.3).

Nội dung của chương được trình bày dựa trên các bài báo số 3 và số 4 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Đạo hàm bậc phân số của các hàm hai biến giá trị số mờ

3.1.1. Đạo hàm bậc phân số của hàm hai biến giá trị thực

Định nghĩa 3.1. [1] Giả sử $q = (q_1, q_2) \in (0,1] \times (0,1]$ và $u \in L^1(J_{ab}, \mathbb{R})$. Tích phân Riemann - Liouville bậc q của hàm thực u được xác định bởi

$$^{RL}I^q_{0+}u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u(s,t)dtds \qquad (3.1)$$

miễn là tích phân ở vế phải xác định với hầu khắp $(x,y) \in J_{ab}$.

Khi $q = (1,1)$, ta quy ước

$$^{RL}I^1_{0+}u(x,y) = \int_0^x \int_0^y u(s,t)dtds, (x,y) \in J_{ab}.$$

Đạo hàm Caputo bậc q của u theo x, y được xác định bởi

$$^{C}D^q u(x,y) = {}^{RL}I^{1-q}_{0+}\big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\big),\ (x,y) \in J_{ab}$$

với điều kiện tích phân ở vế phải được xác định, trong đó $1-q = (1-q_1, 1-q_2)$.

Ví dụ 3.1. *[1] Cho $\lambda, \omega \in (-1, \infty)$ và $q = (q_1, q_2) \in (0,1] \times (0,1]$. Khi đó, ta có*

$$^{RL}I^q_{0+}x^\lambda y^\omega = \frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\omega)}{\Gamma(1+\lambda+q_1)\Gamma(1+\omega+q_2)} x^{\lambda+q_1} y^{\omega+q_2},$$

với hầu khắp $(x,y) \in J_{ab}$.

Tính chất sau về tích phân bậc phân số của hàm số mũ $v(x,y) = e^{\lambda x}, \lambda > 0, (x,y) \in [0,\infty) \times [0,b]$ được trích từ Bổ đề 2.3 trong bài báo số 4 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Kết luận của bổ đề này đóng vai trò quan trọng trong các đánh giá về sự tồn tại cũng như tính chất nghiệm của các bài toán trong Chương 3 và Chương 4.

Bổ đề 3.1. *Cho* $q = (q_1, q_2) \in (0,1] \times (0,1], \lambda > 0$ *và hàm số* $v(x,y) = e^{\lambda x}, (x,y) \in [0,\infty) \times [0,b]$. *Với* $\varepsilon > 0$ *tùy ý, tồn tại* $C > 0$ *sao cho*

$$^{RL}I^q_{0^+} v(x,y) \le G(\lambda, b, q_1, q_2) e^{\lambda x}$$

với mọi $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,b]$, *trong đó*

$$G(\lambda, b, q_1, q_2) = \frac{b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} \max\Big\{ \Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}; 2\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1} \Big\}.$$

Chứng minh. Ta có

$$^{RL}I^q_{0^+} v(x,y) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-z)^{q_2-1} e^{\lambda s} dz ds.$$

Đặt $t = x - s$, ta được

$$\int_0^x (x-s)^{q_1-1} e^{\lambda s} ds = -\int_x^0 t^{q_1-1} e^{\lambda(x-t)} dt = e^{\lambda x} \int_0^x t^{q_1-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Dễ thấy rằng với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $C = \Big(\frac{1}{\varepsilon e}\Big)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} > 0$ sao cho phương trình

$$t = e^{-\lambda t}, \;\; \lambda > 0, \; t > 0$$

có duy nhất nghiệm t_0 thỏa mãn

$$t_0 \le \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}. \tag{3.2}$$

Giả sử $t_0 > 0$ là một nghiệm của phương trình $t^{1-q_1} = e^{(q_1-1)\lambda t}$. Vì $q_1 \le 1$ nên dễ thấy $t_0^{1-q_1} = e^{(q_1-1)\lambda t_0} \le 1$. Do đó, $t_0 \le 1$.

Trường hợp 1: $x < t_0 \le 1$. Khi đó, ta có đánh giá

$$\int_0^x (x-s)^{q_1-1} e^{\lambda s} ds = e^{\lambda x} \int_0^x t^{q_1-1} e^{-\lambda t} dt \le \frac{e^{\lambda x}}{q_1} t_0^{q_1} \le \frac{e^{\lambda x}}{q_1} \Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}.$$

Hơn nữa, với mọi $y \in [0,b]$, ta có

$$\int_0^y (y-z)^{q_2-1}dz = \frac{y^{q_2}}{q_2} \leq \frac{b^{q_2}}{q_2}.$$

Do đó, trong trường hợp này, ta có

$${}^{RL}I^q_{0^+}u(x,y) \leq \frac{b^{q_2}e^{\lambda x}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}.$$

Trường hợp 2: $x \geq t_0$. Ta có

$$\int_0^x (x-s)^{q_1-1}e^{\lambda s}ds = e^{\lambda x}\Big[\int_0^{t_0} t^{q_1-1}e^{-\lambda t}dt + \int_{t_0}^x t^{q_1-1}e^{-\lambda t}dt\Big].$$

+ Xét hàm số $f(t) = t^{q_1-1} - e^{(1-q_1)\lambda t}$ với $t \geq t_0$. Ta có

$$f'(x) = (q_1-1)t^{q_1-2} - \lambda(1-q_1)e^{(1-q_1)\lambda t} \leq 0$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm giảm và do đó $t^{q_1-1} \leq e^{(1-q_1)\lambda t}$ với mọi $t \geq t_0$ và $\lambda > 0$.

+ Xét hai hàm số $g(t) = e^{-\lambda t}$ và $h(t) = t^{-\frac{q_1}{2}}$ với $0 \leq t < t_0 \leq 1$. Dễ thấy $g(t) \in [e^{-\lambda}, 1)$ và $h(t) \in (1,+\infty)$ với mọi $0 \leq t < t_0 \leq 1$. Do đó, $g(t) \leq h(t)\ \forall t \in (0,t_0]$. Điều này có nghĩa $e^{-\lambda t} < t^{-\frac{q_1}{2}}$ với mọi $t \in (0,t_0]$.

Như vậy, trong trường hợp $t_0 \in [0,x]$, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-s)^{q_1-1}e^{\lambda s}ds =& e^{\lambda x}\Big[\int_0^{t_0} t^{q_1-1}e^{-\lambda t}dt + \int_{t_0}^x t^{q_1-1}e^{-\lambda t}dt\Big]\\
&\leq e^{\lambda x}\Big[\int_0^{t_0} t^{q_1-1}t^{-\frac{q_1}{2}}dt + \int_{t_0}^x e^{\lambda(1-q_1)t}e^{-\lambda t}dt\Big]\\
&= e^{\lambda x}\Big[\int_0^{t_0} t^{\frac{q_1}{2}-1}dt + \int_{t_0}^x e^{-\lambda q_1 t}dt\Big]\\
&= e^{\lambda x}\Big[\frac{2}{q_1}t_0^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda q_1}e^{-\lambda q_1 t_0} - \frac{1}{\lambda q_1}e^{-\lambda q_1 x}\Big].
\end{aligned}$$

Vì $e^{-\lambda t_0} = t_0$ và $\dfrac{1}{\lambda q_1}e^{-\lambda q_1 x} > 0$ với mọi $x > 0$ và do đó

$$\int_0^x (x-s)^{q_1-1}e^{\lambda s}ds \leq \frac{e^{\lambda x}}{q_1}\Big[2t_0^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}t_0^{q_1}\Big] \text{ với } x > 0.$$

Từ bất phương trình (3.2), ta suy ra

$$2t_0^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}t_0^{q_1} \le 2\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}.$$

Do đó, trong trường hợp này, ta có

$$^{RL}I_{0+}^{q}u(x,y) \le \frac{b^{q_2}e^{\lambda x}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}\Big[2\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}\Big]$$

Đặt

$$G(\lambda,b,q_1,q_2) = \frac{b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}\max\Big\{\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}; 2\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_1}{2}} + \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_1}\Big\}.$$

Khi đó, với mọi $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,b]$, ta có

$$^{RL}I_{0+}^{q}u(x,y) \le G(\lambda,b,q_1,q_2)e^{\lambda x}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Nhận xét 3.1. Với mỗi $k > 0$ cho trước, ta có thể chọn $\lambda > 0$ đủ lớn sao cho

$$G(\lambda,b,q_1,q_2) < k. \tag{3.3}$$

3.1.2. Đạo hàm bậc phân số của hàm hai biến giá trị mờ

Trong phần này, chúng tôi xây dựng khái niệm đạo hàm Caputo cho hàm hai biến giá trị mờ. Kết quả được trình bày dựa trên phần đầu của bài báo số 3 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Để định nghĩa tích phân bậc phân số cho hàm hai biến giá trị mờ $u : J_{ab} \to E$, chúng tôi chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3.2. *Cho $q = (q_1,q_2) \in (0,1] \times (0,1]$ và hàm mờ $u : J_{ab} \to E$ sao cho $[u(x,y)]^\alpha = [u_\alpha^-(x,y), u_\alpha^+(x,y)]$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Nếu $u_\alpha^-, u_\alpha^+ \in L^1(J_{ab},\mathbb{R})$ và $^{RL}I_{0+}^{q}u_\alpha^-(x,y), {}^{RL}I_{0+}^{q}u_\alpha^+(x,y)$ tồn tại với hầu khắp $(x,y) \in J_{ab}$ thì họ các đoạn $\{G_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$, với*

$$G_\alpha := \Big[{}^{RL}I_{0+}^{q}u_\alpha^-(x,y), {}^{RL}I_{0+}^{q}u_\alpha^+(x,y)\Big],$$

xác định một số mờ $v(x,y) \in E$ sao cho $[v(x,y)]^\alpha = G_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$.

Chứng minh. Với mỗi $(x,y) \in J_{ab}$, vì $u(x,y) \in E$ nên với $q \in (0,1] \times (0,1]$, ta đặt

$$G_\alpha = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\Big[\int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u_\alpha^-(s,t)dtds,$$
$$\int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u_\alpha^+(s,t)dtds\Big].$$

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ và $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Khi đó $u_{\alpha_1}^-(s,t) \leq u_{\alpha_2}^-(s,t)$ và $u_{\alpha_1}^+(s,t) \geq u_{\alpha_2}^+(s,t)$. Do vậy $G_{\alpha_2} \subseteq G_{\alpha_1}$. Với mọi $\alpha_n \in (0,1]$, vì $u(0,0)^-(s,t) \leq u_{\alpha_n}^-(s,t) \leq u_1^-(s,t)$ và $u(0,0)^+(s,t) \geq u_{\alpha_n}^+(s,t) \geq u_1^+(s,t)$ nên ta có:

$$\begin{cases} |u_{\alpha_n}^-(s,t)| \leq \max\{|u(0,0)^-(s,t)|, |u_1^-(s,t)|\} := g_1(s,t) \\ |u_{\alpha_n}^+(s,t)| \leq \max\{|u(0,0)^+(s,t)|, |u_1^+(s,t)|\} := g_2(s,t). \end{cases}$$

Rõ ràng, g_i là khả tích Lebesgue trên $[0,x] \times [0,y]$, với $i = 1,2$. Do đó, nếu $\{\alpha_n\}$ là một dãy không giảm hội tụ tới $\alpha \in (0,1]$ thì theo Định lý sự hội tụ trội Lebesgue, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u_{\alpha_n}^k(s,t)dtds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u_\alpha^k(s,t)dtds$$

trong đó $u_{\alpha_n}^k$ kí hiệu cho $u_{\alpha_n}^-$ hoặc $u_{\alpha_n}^+$. Do đó, $G_\alpha = \bigcap\limits_{n\geq 1} G_{\alpha_n}$. Theo Định lý 1.3, ta nhận được kết quả của bổ đề. □

Từ bổ đề trên, ta có thể định nghĩa tích phân Riemann - Liouville bậc phân số cho các hàm mờ như sau:

Định nghĩa 3.2. Cho $q = (q_1, q_2) \in (0,1] \times (0,1]$ và $u \in L^1(J_{ab}, E)$, $[u(x,y)]^\alpha = [u_\alpha^-(x,y), u_\alpha^+(x,y)]$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Tích phân Riemann - Liouville bậc q cho hàm mờ u được kí hiệu hình thức dưới dạng

$${}_{F}^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1}u(s,t)dtds$$

và được xác định bởi tập mức

$$[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q u(x,y)]^\alpha = [{}^{RL}I_{0+}^q u_\alpha^-(x,y), {}^{RL}I_{0+}^q u_\alpha^+(x,y)], \alpha \in [0,1]$$

với mọi $(x,y) \in J_{ab}$. Khi $q = (1,1)$, ta kí hiệu

$${}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^1 u(x,y) = \int_0^x \int_0^y u(s,t)dtds \quad \text{với mọi } (x,y) \in J_{ab}.$$

Ví dụ 3.2. Cho $u : J_{ab} \to E$ là một hàm mờ, $u(x,y) = xyC$ trong đó C là số mờ với tập mức $[C]^\alpha = [\alpha, 2-\alpha]$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Khi đó, với $q \in (0,1] \times (0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q u(x,y)]^\alpha =& [{}^{RL}I_{0+}^q \alpha xy, {}^{RL}I_{0+}^q (2-\alpha)xy] \\ =& \frac{B(2,q_1)B(2,q_2)}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} x^{q_1+1} y^{q_2+1} [\alpha, 2-\alpha] \\ =& \frac{4}{\Gamma(q_1+2)\Gamma(q_2+2)} x^{q_1+1} y^{q_2+1} [C]^\alpha.\end{aligned}$$

Do đó, ${}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q u(x,y) = \dfrac{4}{\Gamma(q_1+2)\Gamma(q_2+2)} x^{q_1} y^{q_2} u(x,y),\ (x,y) \in J_{ab}$.

Mệnh đề 3.1. *Cho $p = (p_1,p_2), q = (q_1,q_2) \in (0,1] \times (0,1]$ sao cho $p + q = (p_1+q_1, p_2+q_2) \in (0,1] \times (0,1]$ và $u \in L^1(J_{ab}, E)$. Khi đó, ta có*

$$({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^p)({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q)u = ({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{p+q})u$$

với điều kiện các tích phân ở vế phải và vế trái xác định.

Chứng minh. Giả sử $g \in L^1(J_{ab}, E)$ sao cho $[g(x,y)]^\alpha = [g_\alpha^-(x,y), g_\alpha^+(x,y)]$ với mọi $(x,y) \in J_{ab}$ và $\alpha \in [0,1]$, trong đó

$$g_\alpha^-(x,y) := \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} u_\alpha^-(s,t)dtds$$

và

$$g_\alpha^+(x,y) := \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{q_1-1}(y-t)^{q_2-1} u_\alpha^+(s,t)dtds.$$

Điều này có nghĩa là $[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q u(x,y)]^\alpha = [g_\alpha^-(x,y), g_\alpha^+(x,y)]$ hay ${}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q u(x,y) = g(x,y)$. Do đó, ta có

$$
\begin{aligned}
[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^p {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q u]^\alpha &= [{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^p g(x,y)]^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}\Big[\int_0^x\int_0^y (x-s)^{p_1-1}(y-t)^{p_2-1} g_\alpha^-(s,t)dtds, \\
&\qquad \int_0^x\int_0^y (x-s)^{p_1-1}(y-t)^{p_2-1} g_\alpha^+(s,t)dtds\Big]. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Để đơn giản, ta đặt $X = x-s,\ Y = y-t, S = s-s_1$ và $T = t-t_1$. Khi đó, ta được

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^y (x-s)^{p_1-1}(y-t)^{p_2-1} g_\alpha^-(s,t)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\int_0^x\int_0^y X^{p_1-1}Y^{p_2-1}\int_0^s\int_0^t S^{q_1-1}T^{q_2-1}u_\alpha^-(s-S,t-T)dTdSdYdX.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Xét tích phân

$$
\begin{aligned}
A^- &= \int_0^x\int_0^y X^{p_1-1}Y^{p_2-1}\int_0^s\int_0^t S^{q_1-1}T^{q_2-1}u_\alpha^-(s-S,t-T)dTdSdYdX \\
&= \int_0^x X^{p_1-1}\int_0^s S^{q_1-1}\Big(\int_0^y\int_0^t Y^{p_2-1}T^{q_2-1}u_\alpha^-(s-S,t-T)dTdY\Big)dSdX \\
&= \int_0^x X^{p_1-1}\int_0^s S^{q_1-1}\Big(\int_0^y\int_T^y Y^{p_2-1}T^{q_2-1}u_\alpha^-(s-S,t-T)dTdY\Big)dSdX \\
&= \int_0^x\int_S^x X^{p_1-1}S^{q_1-1}dXdS\int_0^y\int_T^y Y^{p_2-1}T^{q_2-1}u_\alpha^-(s-S,t-T)dTdY.
\end{aligned}
$$

Tiếp tục thay $X = (x-S)(1-\theta_1),\ S = \theta_1(x-S),\ Y = (t-T)(1-\theta_2),\ T = \theta_2(t-T)$ vào A^-, ta được

$$
\begin{aligned}
A^- &= \int_0^x\int_0^1 (x-s_1)^{p_1-1}(1-\theta_1)^{p_1-1}\theta_1^{q_1-1}(x-s_1)^{q_1}d\theta_1 ds_1\times \\
&\qquad \int_0^y\int_0^1 (y-t_1)^{p_2-1}(1-\theta_2)^{p_2-1}\theta_2^{q_2-1}(y-t_1)^{q_2}u_\alpha^-(s_1,t_1)d\theta_2 dt_1 \\
&= \int_0^x (x-s_1)^{p_1+q_1-1}ds_1\int_0^1 (1-\theta_1)^{p_1-1}\theta_1^{q_1-1}d\theta_1\times \\
&\qquad \int_0^y (y-t_1)^{p_2+q_2-1}u_\alpha^-(s_1,t_1)dt_1\int_0^1 (1-\theta_2)^{p_2-1}\theta_2^{q_2-1}d\theta_2
\end{aligned}
$$

Như vậy, ta được

$$A^- = B(p_1,q_1)B(p_2,q_2)\int_0^x\int_0^y (x-s_1)^{p_1+q_1-1}(y-t_1)^{p_2+q_2-1}u_\alpha^-(s_1,t_1)dt_1ds_1. \tag{3.6}$$

Kết hợp (3.4) - (3.6), ta có

$$\begin{aligned}
&[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{p}\,{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q}u]^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(p_1+q_1)\Gamma(p_2+q_2)}\Bigg[\int_0^x\int_0^y (x-s_1)^{p_1+q_1-1}(y-t_1)^{p_2+q_2-1}u_\alpha^-(s_1,t_1)dt_1ds_1, \\
&\qquad \int_0^x\int_0^y (x-s_1)^{p_1+q_1-1}(y-t_1)^{p_2+q_2-1}u_\alpha^+(s_1,t_1)dt_1ds_1\Bigg].
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với $[{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{p}\,{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q}u]^\alpha = [{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{p+q}u]^\alpha$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Mệnh đề được chứng minh. □

Định nghĩa 3.3. Cho $q = (q_1,q_2) \in [0,1) \times [0,1)$ và $u \in \mathcal{W}_1(J_{ab},E) \cup \mathcal{W}_2(J_{ab},E)$. Đạo hàm gH-Caputo bậc q của hàm mờ u theo x,y được xác định bởi:

$${}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q u(x,y) = {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{1-q}\big(D_{xy}u(x,y)\big),\ (x,y) \in J_{ab}$$

với điều kiện các biểu thức ở vế phải được xác định, trong đó $1-q = (1-q_1, 1-q_2)$.

- Nếu $u \in \mathcal{W}_1(J_{ab},E)$ thì ta nói u là khả vi gH-Caputo bậc q kiểu (i) theo x,y trên J_{ab}.
- Nếu $u \in \mathcal{W}_2(J_{ab},E)$ thì ta nói u là khả vi gH-Caputo bậc q kiểu (ii) theo x,y trên J_{ab}.

Ví dụ 3.3. Xét hàm mờ u cho trong Ví dụ 3.2, $u(x,y) = xyC$. Đạo hàm Hukuhara suy rộng của u theo x được tính như sau

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(u(x+h,y)\ominus_{gH} u(x,y)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big((x+h)yC \ominus_{gH} xyC\big) \\
&= yC.
\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = yC$. Tương tự, ta được $D_{xy}u(x,y) = C$. Dễ thấy trong trường hợp này $u \in \mathcal{W}_1(J_{ab}, E)$ và ta có

$$\begin{aligned}
[{}^C_{gH}\mathcal{D}^q u(x,y)]^\alpha &= [{}^{RL}_F\mathcal{I}^{1-q}_{0^+} D_{xy}u(x,y)]^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q_1)\Gamma(1-q_2)} \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{(1-q_1)(1-q_2)}[\alpha, 2-\alpha] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)} x^{1-q_1}y^{1-q_2}[C]^\alpha.
\end{aligned}$$

Do đó, u là gH-khả vi Caputo kiểu (i) và

$${}^C_{gH}\mathcal{D}^q u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)} x^{-q_1}y^{-q_2}u(x,y).$$

Ví dụ 3.4. Xét hàm mờ $u : J_{ab} \longrightarrow E$ xác định bởi $u(x,y) = (x - xy)C$, trong đó $b < 1$ và $C = (0, 2, 3, 5)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(u(x+h,y) \ominus_{gH} u(x,y)\Big) \\
&\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big((x+h)(1-y)C \ominus_{gH} x(1-y)C\Big) = (1-y)C
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = (1-y)C.$$

Mặt khác, vì $b < 1$ nên với mọi $y \in [0, b]$ ta có $1 - y > 0$. Khi đó u là gH-khả vi kiểu (i) theo x. Tiếp tục ta được

$$D_{xy}u(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \ominus_{gH} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y+h)\Big) = (-1)C.$$

Trong trường hợp này, ta thấy $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ là gH-khả vi kiểu (ii) theo y và

$$\begin{aligned}
[{}^C_{gH}\mathcal{D}^q u(x,y)]^\alpha &= [{}^{RL}_F\mathcal{I}^{1-q}_{0^+}\, {}_{gH}D_{xy}u(x,y)]^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q_1)\Gamma(1-q_2)}\Big[\int_0^x\int_0^y (x-s)^{-q_1}(y-t)^{-q_2}2\alpha dtds, \\
&\qquad \int_0^x\int_0^y (x-s)^{-q_1}(y-t)^{-q_2}(5-2\alpha)dtds\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q_1)\Gamma(1-q_2)} \frac{x^{1-q_1}y^{1-q_2}}{(1-q_1)(1-q_2)}[2\alpha, 5-2\alpha].
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là

$$[{}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q u(x,y)]^\alpha = \frac{1}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)} x^{1-q_1} y^{1-q_2} [(-1)C]^\alpha.$$

Do đó, u khả vi gH-Caputo kiểu (ii) và ta có

$${}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q u(x,y) = \frac{-x^{1-q_1} y^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_1)\Gamma(2-q_2)} C.$$

3.2. Bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trên miền bị chặn

3.2.1. Đặt bài toán

Xét phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số

$$ {}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),\ (t,x) \in \Omega_T^b = [0,T] \times [0,b] \tag{3.7}$$

cùng điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = \eta_1(t),\ \ t \in [0,T],\ \ u(0,x) = \eta_2(x),\ x \in [0,b], \tag{3.8}$$

trong đó $f : \Omega_T^b \times C(\Omega_T^b, E) \to E$ và $\eta_1 \in C([0,T], E)$, $\eta_2 \in C([0,b], E)$ là các hàm cho trước sao cho các hiệu $\eta_1(t) \ominus_H u(0,0), \eta_2(x) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại, với $t \in [0,T], x \in [0,b]$ và $\eta_1(0) = \eta_2(0) = u(0,0)$.

Mệnh đề 3.2. *Giả sử $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(\Omega_T^b, E) \cup \mathcal{W}_2(\Omega_T^b, E)$ thỏa mãn (3.7)-(3.8).*

1) Nếu $u \in \mathcal{W}_1(\Omega_T^b, E)$ thì u thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$u(t,x) = \psi(t,x) \oplus {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)) \ \text{ với mọi } \ (t,x) \in \Omega_T^b. \tag{3.9}$$

2) Nếu $u \in \mathcal{W}_2(\Omega_T^b, E)$ thì u thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$u(t,x) = \psi(t,x) \ominus_H (-1){}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)) \ \text{ với mọi } \ (t,x) \in \Omega_T^b. \tag{3.10}$$

Trong đó $\psi(t,x) = \eta_2(x) \oplus [\eta_1(t) \ominus_H \eta_1(0)],\ (t,x) \in \Omega_T^b$.

Chứng minh. Giả sử $u(t,x)$ là một nghiệm của bài toán (3.7) - (3.8). Từ Định nghĩa 3.3, ta có

$$ {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{1-q}\Big(D_{tx}u(t,x)\Big) = f(t,x,u(t,x)), \text{ với } (t,x) \in \Omega_T^b, \ k = 1,2. $$

Vì $f \in C(\Omega_T^b \times C(\Omega_T^b, E), E)$ nên tích phân ${}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x))$ tồn tại và

$$ {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q}\, {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{1-q}\Big(D_{tx}u(t,x)\Big) = {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x)). $$

Áp dụng Mệnh đề 3.1, ta có ${}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{1}\Big(D_{tx}u(t,x)\Big) = {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x))$. Điều này suy ra

$$ \int_0^t \int_0^x D_{sz}u(s,z)dzds = {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x)) \text{ với mọi } (t,x) \in \Omega_T^b. $$

Chứng minh tương tự Mệnh đề 2.1 ta nhận được điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 3.4. Hàm $u \in C(\Omega_T^b, E)$ được gọi là

1) nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (3.7)-(3.8) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (3.9),

2) nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (3.7)-(3.8) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (3.10).

3.2.2. Tính giải được của bài toán

Với giả thiết hàm vế phải f thỏa mãn điều kiện Lipschitz, bằng cách sử dụng Nguyên lý ánh xạ co Banach, chúng tôi nhận được sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (3.7)-(3.8) trong định lý sau.

Định lí 3.1. *Giả sử hàm $f \in C(\Omega_T^b \times C(\Omega_T^b, E), E)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ ba, tức là tồn tại số thực dương L sao cho*

$$ d_\infty(f(t,x,\phi_1), f(t,x,\phi_2)) \leq L d_\infty(\phi_1,\phi_2) \tag{3.11} $$

với mọi $\phi_1, \phi_2 \in C(\Omega_T^b, E), (t,x) \in \Omega_T^b$. Khi đó, bài toán (3.7)-(3.8) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 trên Ω_T^b.

Chứng minh. Xét trên $C(\Omega_T^b, E)$ metric d_r xác định bởi

$$d_r(u,v) = \sup_{(t,x)\in\Omega_T^b} \Big\{ t^{r_1} x^{r_2} d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \Big\},\ r = (r_1, r_2),\ r_1, r_2 > 0.$$

Ta có $(C(\Omega_T^b, E), d_r)$ là không gian metric đầy đủ. Với $u \in (C(\Omega_T^b, E), d_r)$, đặt

$$P_1(u(t,x)) = \psi(t,x) \oplus {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)) \quad \text{với mọi } (t,x) \in \Omega_T^b.$$

Từ Bổ đề 1.5, ta suy ra $P_1 u \in (C(\Omega_T^b, E), d_r)$. Ta sẽ chứng minh P_1 có điểm bất động duy nhất trong $(C(\Omega_T^b, E), d_r)$. Thật vậy, từ tính chất *ii*) của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned}
&d_\infty(P_1 u(t,x),\ P_1 v(t,x)) \\
&\quad \le d_\infty\left({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,v(t,x))\right) \\
&\quad \le \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} L d_\infty(u(s,z), v(s,z)) dz ds \\
&\quad \le \frac{L}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} d_{1-q}(u,v) \int_0^t (t-s)^{q_1-1} s^{q_1-1} ds \int_0^x (x-z)^{q_2-1} z^{q_2-1} dz \\
&\quad \le \frac{L\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma(2q_1)\Gamma(2q_2)} t^{2q_1-1} x^{2q_2-1} d_{1-q}(u,v).
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$t^{1-q_1} x^{1-q_2} d_\infty(P_1 u, P_1 v) \le \frac{L t^{q_1} x^{q_2} \Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma(2q_1)\Gamma(2q_2)} d_{1-q}(u,v). \tag{3.12}$$

Tiếp theo, với mỗi $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, ta xây dựng phép toán P_1^n như sau

$$P_1^n(u(t,x)) = P_1(P_1^{n-1}(u(t,x))) \quad \text{với mọi } (t,x) \in \Omega_T^b.$$

Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh đánh giá

$$d_\infty(P_1^n u(t,x), P_1^n v(t,x)) \le \frac{L t^{nq_1+q_1-1} x^{nq_2+q_2-1} \Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma((n+1)q_1)\Gamma((n+1)q_2)} d_{1-q}(u,v) \tag{3.13}$$

đúng với mọi $u, v \in (C(\Omega_T^b, E), d_r)$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

Thật vậy, khi $n = 2$, ta thấy (3.13) đúng. Giả sử rằng (3.13) đúng với $n = k$. Khi đó, với $n = k+1$, ta có

$$d_\infty(P_1^{k+1} u(t,x), P_1^{k+1} v(t,x)) = d_\infty(P_1(P_1^k u)(t,x), P_1(P_1^k v)(t,x))$$

$$\leq d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q f(t,x,P_1^k u(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q f(t,x,P_1^k v(t,x)))$$
$$\leq \frac{L}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} d_\infty\left(P_1^k u(s,z), P_1^k v(s,z))\right) dzds$$

Từ giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned}
&d_\infty(P_1^{k+1}u(t,x), P_1^{k+1}v(t,x))\\
&\leq \frac{L^{k+1}t^{(k+2)q_1-1}x^{(k+2)q_2-1}}{\Gamma((k+1)q_1)\Gamma((k+1)q_2)} d_{1-q}(u,v)B(q_1,(k+1)q_1)B(q_2,(k+1)q_2)\\
&\leq \frac{L^{k+1}t^{(k+2)q_1-1}x^{(k+2)q_2-1}\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma((k+2)q_1)\Gamma((k+2)q_2)} d_{1-q}(u,v) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Do đó, (3.13) đúng với $n = k+1$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Tiếp tục, ta nhân cả hai vế của bất đẳng thức (3.13) với $t^{1-q_1}x^{1-q_2}$ ta được

$$t^{1-q_1}x^{1-q_2} d_\infty(P_1^n u(t,x), P_1^n v(t,x)) \leq \frac{L^n t^{nq_1} x^{nq_2}\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma((n+1)q_1)\Gamma((n+1)q_2)} d_{1-q}(u,v).$$

Điều này suy ra

$$d_{1-q}(P_1^n u, P_1^n v) \leq \frac{L^n T^{nq_1} b^{nq_2}\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma((n+1)q_1)\Gamma((n+1)q_2)} d_{1-q}(u,v) \qquad (3.15)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Mặt khác, vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(LT^{q_1}b^{q_2})^n}{\Gamma((n+1)q_1)\Gamma((n+1)q_2)} = 0 \qquad (3.16)$$

nên P_1^n là một ánh xạ co khi n đủ lớn. Như vậy, tồn tại duy nhất $u \in C(\Omega_T^b, E)$ thỏa mãn phương trình (3.9). Định lý được chứng minh. □

Với mọi $(t,x) \in \Omega_T^b$, ta kí hiệu

$$F_\psi^{f,q}[u](t,x) = \psi(t,x) \ominus_H (-1)\,{}_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q f(t,x,u(t,x))$$

và $C_\psi^f(\Omega_T^b, E) = \left\{u \in (C(\Omega_T^b, E), d_r) : F_\psi^{f,q}[u](t,x) \in E, (t,x) \in \Omega_T^b\ \right\}$.

Sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (3.7) - (3.8) được chúng tôi chứng minh cụ thể trong định lý sau.

Định lí 3.2. *Giả sử hàm $f \in C(\Omega_T^b \times C(\Omega_T^b, E), E)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (3.11). Hơn nữa, ta giả sử*
i) $C_\psi^f(\Omega_T^b, E) \neq \emptyset$ *và*
ii) nếu $u \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ *thì* $F_\psi^{f,q}[u](t,x) \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ *với mọi* $(t,x) \in \Omega_T^b$.
Khi đó, bài toán (3.7)-(3.8) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 2 trên Ω_T^b.

Chứng minh. Vì $C_\psi^f(\Omega_T^b, E) \neq \emptyset$ nên tồn tại $u \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$. Từ giả thiết ta có $F_\psi^{f,q}[u](t,x) \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ với mọi $(t,x) \in \Omega_T^b$. Xét ánh xạ $P_2 : C_\psi^f(\Omega_T^b, E) \to C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ cho bởi

$$P_2(u(t,x)) = \psi(t,x) \ominus_H (-1) {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)),\ (t,x) \in \Omega_T^b.$$

Từ tính chất *iv*) của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3, ta có đánh giá

$$d_\infty(P_2u(t,x),\ P_2v(t,x)) \leq d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,v(t,x))).$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh bất đẳng thức (3.12) ta được

$$t^{1-q_1}x^{1-q_2}d_\infty(P_2u, P_2v) \leq \frac{Lt^{q_1}x^{q_2}\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma(2q_1)\Gamma(2q_2)}d_{1-q}(u,v).$$

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta xây dựng dãy các phép toán $\{P_2^n\}_{n\geq 2}$ xác định bởi

$$P_2^n(u(t,x)) = P_2(P_2^{n-1}(u(t,x))) \text{ với mọi } (t,x) \in \Omega_T^b.$$

Dùng cách lập luận tương tự cho (3.14) và (3.15), ta được

$$d_{1-q}(P_2^n u, P_2^n v) \leq \frac{L^n T^{nq_1} b^{nq_2}\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma((n+1)q_1)\Gamma((n+1)q_2)}d_{1-q}(u,v) \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Bởi (3.16) ta suy ra P_2^n là ánh xạ co với n đủ lớn. Mặt khác, chứng minh tương tự Bổ đề 2.2, ta có $(C_\psi^f(\Omega_T^b, E), d_r)$ là một không gian metric đầy đủ. Do đó, P_2 có duy nhất điểm bất động. Định lý được chứng minh. □

Khi hàm vế phải f không thỏa mãn điều kiện Lipschitz, sử dụng Định lý 1.9, định lý điểm bất động Schauder cho không gian metric nửa tuyến tính

$C(\Omega_T^b, E_c)$, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.7) - (3.8) với các giả thiết

($\mathbf{G_1}$) Tồn tại $R > 0$ sao cho hàm $f : \Omega_T^b \times B(\tilde{0}, R) \to E_c$ là compact, trong đó $B(\tilde{0}, R) = \{u \in C(\Omega_T^b, E_c) : H(u, \tilde{0}) \leq R\}$ và $\tilde{0} \in C(\Omega_T^b, E_c)$ được xác định bởi $\tilde{0}(t, x) = \hat{0}$.

($\mathbf{G_2}$) ψ có giá compact và $d_\infty(\psi(t, x), \hat{0}) \leq \dfrac{R}{2}$ với mọi $(t, x) \in \Omega_T^b$.
Kết quả được chứng minh chi tiết trong định lý sau.

Định lí 3.3. *Giả sử các giả thiết* ($\mathbf{G_1}$) - ($\mathbf{G_2}$) *đúng. Khi đó, bài toán (3.7)-(3.8) có ít nhất một nghiệm tích phân kiểu 1 trên* Ω_T^b. *Hơn nữa, nếu* $C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ $\neq \emptyset$ *và với mỗi* $u \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$, $F_\psi^{f,q}[u](t, x) \in C_\psi^f(\Omega_T^b, E)$ *với mọi* $(t, x) \in \Omega_T^b$ *thì bài toán (3.7)- (3.8) có ít nhất một nghiệm tích phân kiểu 2 trên* Ω_T^b.

Chứng minh. Ta có $B(\tilde{0}, R)$ là tập con lồi, đóng, bị chặn, khác rỗng của $C(\Omega_T^b, E_c)$. Với $u \in C(\Omega_T^b, E_c)$, đặt $P_3u(t, x) = \psi(t, x) \oplus_F^{RL} \mathcal{I}_{0+}^q f(t, x, u(t, x))$, $(t, x) \in \Omega_T^b$. Vì $f : \Omega_T^b \times B(\tilde{0}, R) \to E_c$ là compact nên f bị chặn. Đặt

$$M_0 = \sup_{(t,x,\varphi) \in \Omega_T^b \times B(\tilde{0}, R)} H(f(t, x, \varphi), \tilde{0}).$$

Khi đó, vì T^{q_1} là đa thức số mũ dương nên tồn tại $T_1 > 0$ sao cho

$$\frac{M_0 T_1^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)\Gamma(q_2 + 1)} \leq \frac{R}{2}.$$

Đặt $T_* = \min\{T, T_1\}$ ta có

$$\frac{M_0 T_*^{q_1} b^{q_2}}{\Gamma(q_1 + 1)\Gamma(q_2 + 1)} \leq \frac{R}{2}. \tag{3.17}$$

Kí hiệu $\Omega_* = [0, T_*] \times [0, b] \subset \Omega_T^b$ và $B_*(\tilde{0}, R) = \{u \in C(\Omega_*, E_c) : H(u, \tilde{0}) \leq R\}$. Với mỗi $u \in B_*(\tilde{0}, R)$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(P_3u(t, x), \hat{0}) &\leq d_\infty(\psi(t, x), \hat{0}) + d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t, x, u(t, x)), \hat{0}) \\ &\leq d_\infty(\psi(t, x), \hat{0}) + \frac{M_0}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t - s)^{q_1 - 1}(x - z)^{q_2 - 1} dz ds. \end{aligned}$$

Do đó, ta suy ra

$$d_\infty(P_3u(t,x),\hat{0}) \leq d_\infty(\psi(t,x),\hat{0}) + \frac{M_0 T_*^{q_1} b_*^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_*$. Từ (3.17) và vì $d_\infty(\psi(t,x),\hat{0}) \leq \dfrac{R}{2}$, ta có $H(P_3u,\tilde{0}) \leq R$. Điều này có nghĩa là $P_3(u) \in B_*(\tilde{0},R)$.

Giả sử $u_n \to u$ trong $B_*(\tilde{0},R)$. Từ tính chất của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(P_3u_n(t,x),P_3u(t,x)) &\leq d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u_n(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x))) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} \times \\ &\qquad \sup_{(s,z)\in[0,t]\times[0,x]} d_\infty\big(f(s,z,u_n(s,z)), f(s,z,u(s,z))\big) dzds. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &d_\infty(P_3u_n(t,x),P_3u(t,x)) \\ &\quad \leq \frac{t^{q_1}x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,b]} d_\infty\big(f(t,x,u_n(t,x)), f(t,x,u(t,x))\big) \\ &\quad \leq \frac{T^{q_1}b^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,b]} d_\infty\big(f(t,x,u_n(t,x)), f(t,x,u(t,x))\big). \end{aligned}$$

Vì f liên tục nên $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times[0,b]} d_\infty\big(f(t,x,u_n(t,x)), f(t,x,u(t,x))\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Do đó, P_3 liên tục.

Tiếp theo, ta chứng minh $P_3(B_*(\tilde{0},R))$ là compact tương đối trong $C(\Omega_*, E_c)$. Để chứng minh điều này, theo Định lý 1.8, ta cần chứng minh hai phần

Phần 1. $P_3(B_*(\tilde{0},R))$ là tập con đồng liên tục của $C(\Omega_*,E_c)$.

Cố định $(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in \Omega_*$ sao cho $t_1 < t_2, x_1 < x_2$ và $u \in B_*(\tilde{0},R)$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(P_3u(t_2,x_2),P_3u(t_1,x_1)) &\leq d_\infty[\psi(t_2,x_2),\psi(t_1,x_1)] \\ &\quad + d_\infty\Big({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_2,x_2,u(t_2,x_2)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_1,x_1,u(t_1,x_1))\Big). \quad (3.18) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$
\begin{aligned}
d_\infty\Big({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_2,x_2,u(t_2,x_2)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_1,x_1,u(t_1,x_1))\Big)&\\
\le \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} d_\infty\Big(&\int_0^{t_1}\int_0^{x_1}(t_2-s)^{q_1-1}(x_2-z)^{q_2-1}f(s,z,u(s,z))dzds,\\
&\int_0^{t_1}\int_0^{x_1}(t_1-s)^{q_1-1}(x_1-z)^{q_2-1}f(s,z,u(s,z))dzds\Big)\\
+ d_\infty\Big(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1}&(t_2-s)^{q_1-1}(x_2-z)^{q_2-1}f(s,z,u(s,z))dzds,\hat{0}\Big)\\
+ d_\infty\Big(\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}&(t_2-s)^{q_1-1}(x_2-z)^{q_2-1}f(s,z,u(s,z))dzds,\hat{0}\Big)\\
+ d_\infty\Big(\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}&(t_2-s)^{q_1-1}(x_2-z)^{q_2-1}f(s,z,u(s,z))dzds,\hat{0}\Big).
\end{aligned}
$$

Vì f bị chặn nên ta có đánh giá

$$
\begin{aligned}
d_\infty\Big({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_2,x_2,u(t_2,x_2)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t_1,x_1,u(t_1,x_1))\Big)&\\
\le \frac{M_0}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}\Big[t_2^{q_1}x_2^{q_2}-t_1^{q_1}x_1^{q_2}\Big].& \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Kết hợp (3.18) và (3.19), ta thấy rằng khi cho $(t_1,x_1)\to(t_2,x_2)$ thì

$$d_\infty(P_3u(t_2,x_2),P_3u(t_1,x_1))\to 0$$

với mọi $u\in B(\tilde{0},R)$. Do đó, $P_3(B(\tilde{0},R))$ là đồng liên tục trên $C(\Omega_*,E_c)$.

Phần 2. $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ là compact tương đối trong E_c. Theo Định lý 1.5, ta phải chứng minh hai điều kiện sau

a. $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ là đồng liên tục mức.

b. $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ là tập con giá compact của E_c.

Thật vậy, cố định $(t,x)\in\Omega_*$. Ta thấy $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)\in E_c$ và nếu $\nu\in P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ thì $\nu=\psi(t,x)\oplus_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x))$ với $u\in B(\tilde{0},R)$. Với mỗi $(t,x)\in\Omega_*$, ta giả sử m là số dương sao cho $mt^{q_1}x^{q_2}<\dfrac{1}{2}$. Vì f là compact nên $f(\Omega_T^b\times B(\tilde{0},R))$ là compact tương đối trong E_c. Từ Nhận xét 1.2, ta suy ra $f(\Omega_T^b\times B(\tilde{0},R))$ có giá compact và đồng liên tục mức. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\alpha, \beta \in [0,1]$ thỏa mãn $|\alpha - \beta| < \delta$ thì

$$d_H([f(t,x,u(t,x))]^\alpha, [f(t,x,u(t,x))]^\beta) < \Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)m\varepsilon$$

và $d_H([\psi(t,x)]^\alpha, [\psi(t,x)]^\beta) \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ với mọi $(t,x) \in \Omega_*$.
Do đó, khi $|\alpha - \beta| < \delta$, ta có

$$\begin{aligned}
&d_H([\nu]^\alpha, [\nu]^\beta) = d_H([P_3u(t,x)]^\alpha, [P_3u(t,x)]^\beta) \\
&\le d_H\big([\psi(t,x)]^\alpha, [\psi(t,x)]^\beta\big) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} d_H\Big(\Big[\int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} f(s,z,u(s,z))dzds\Big]^\alpha, \\
&\qquad \Big[\int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} f(s,z,u(s,z))dzds\Big]^\beta\Big) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + mt^{q_1}x^{q_2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Do đó, $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ là đồng liên tục mức trong E_c.

Với mỗi $(t,x) \in \Omega_*$, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big[\psi(t,x) \oplus \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} f(s,z,u(s,z))dzds\Big]^0 \\
&= [\psi(t,x)]^0 + \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t (t-s)^{q_1-1}[f(s,z,u(s,z))]^0 ds \int_0^x (x-z)^{q_2-1}dz.
\end{aligned}$$

Vì ψ có giá compact, tồn tại tập con compact $K_1 \subset \mathbb{R}$ sao cho $[\psi(t,x)]^0 \subset K_1$.

Hơn nữa, vì $f(\Omega_T^b \times B(\tilde{0},R))$ có giá compact, ta giả sử rằng tồn tại $K_2 \subset \mathbb{R}$ sao cho $[f(t,x,u(t,x))]^0 \subset K_2$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big[\psi(t,x) \oplus \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} f(s,z,u(s,z))dzds\Big]^0 \\
&\qquad \subseteq K_1 + \frac{K_2}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^x (x-z)^{q_2-1}dz = K_1 + \frac{K_2 t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}.
\end{aligned}$$

Điều này nghĩa là tồn tại một tập compact $K_0 \subseteq \mathbb{R}$ sao cho

$$\Big[\psi(t,x) \oplus \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} f(s,z,u(s,z))dzds\Big]^0 \subseteq K_0.$$

hay $P_3(B(\tilde{0},R))(t,x)$ có giá compact với mỗi $(t,x) \in \Omega_*$. Do đó, P_3 là compact.

Theo Định lý 1.9, P_3 có ít nhất một điểm bất động u trong $B(\tilde{0}, R)$ và u là nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán.

Với giả thiết $C_{\psi}^{f}(\Omega_T^b, E_c) \neq \emptyset$ nên với $u \in C_{\psi}^{f}(\Omega_T^b, E_c)$, $F_{\psi}^{f,q}[u](t,x) \in C_{\psi}^{f}(\Omega_T^b, E)$ với mọi $(t,x) \in \Omega_T^b$. Do đó, ta xác định được ánh xạ P_4 bởi:

$$P_4(u(t,x)) = \psi(t,x) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x))$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_T^b$. Tiếp tục sử dụng Mệnh đề 1.3 và lặp lại các bước chứng minh như đối với P_3 ta được P_4 là compact và theo Định lý 1.9, P_4 có ít nhất một điểm bất động u trong $B(\tilde{0}, R)$ và u là nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán. Định lý được chứng minh. □

3.3. Bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trên miền vô hạn

3.3.1. Đặt bài toán

Xét phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số

$$ {}_{gH}^{C}\mathcal{D}^{q} u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),\ \Omega_{\infty}^{b} = [0,\infty) \times [0,b] \tag{3.21}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = \eta_1(t),\ t \in [0,\infty),\ u(0,x) = \eta_2(x),\ x \in [0,b] \tag{3.22}$$

trong đó $f : \Omega_{\infty}^{b} \times C(\Omega_{\infty}^{b}, E) \to E$, $\eta_1 \in C([0,\infty), E)$, $\eta_2 \in C([0,b], E)$ là các hàm cho trước sao cho các hiệu $\eta_1(t) \ominus_H u(0,0), \eta_2(x) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại với $t \in [0,\infty), x \in [0,b]$ và $\eta_1(0) = \eta_2(0) = u(0,0)$.

Mệnh đề sau được chúng tôi chứng minh tương tự như Mệnh đề 3.2:

Mệnh đề 3.3. *Giả sử $u(.,.) \in \mathcal{W}_1(\Omega_{\infty}^{b}, E) \cup \mathcal{W}_2(\Omega_{\infty}^{b}, E)$ thỏa mãn (3.21)-(3.22).*

1) Nếu $u \in \mathcal{W}_1(\Omega_{\infty}^{b}, E)$ thì u thỏa mãn phương trình tích phân

$$u(t,x) = \psi(t,x) \oplus_F^{RL} \mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x)) \ \text{ với mọi } (t,x) \in \Omega_{\infty}^{b}. \tag{3.23}$$

2) Nếu $u \in \mathcal{W}_2(\Omega^b_\infty, E)$ thì u thỏa mãn phương trình tích phân

$$u(t,x) = \psi(t,x) \ominus_H (-1)^{RL}_F\mathcal{I}^q_{0+} f(t,x,u(t,x)) \ \text{với mọi} \ (t,x) \in \Omega^b_\infty. \quad (3.24)$$

Trong đó $\psi(t,x) = \eta_2(x) \oplus [\eta_1(t) \ominus_H \eta_1(0)]$, $(t,x) \in \Omega^b_\infty$.

Định nghĩa 3.5. Hàm $u \in C(\Omega^b_\infty, E)$ được gọi là

1) nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (3.21)- (3.22) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (3.23).

2) nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán (3.21)- (3.22) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (3.24).

3.3.2. Tính giải được của bài toán

Để chứng minh tính giải được của bài toán (3.21)-(3.22) ta giả sử có các giả thiết sau.

($\mathbf{G_3}$) Hàm $f : \Omega^b_\infty \times C(\Omega^b_\infty, E) \to E$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$d_\infty(f(t,x,\phi_1), f(t,x,\phi_2)) \le L d_\infty(\phi_1, \phi_2)$$

với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$, $\phi_1, \phi_2 \in C(\Omega^b_\infty, E)$.

($\mathbf{G_4}$) Tồn tại các số thực dương M_4, c_4 sao cho

$$d_\infty(f(t,x,\hat{0}), \hat{0}) \le M_4 e^{c_4 t}, \ \ (t,x) \in \Omega^b_\infty.$$

($\mathbf{G_5}$) Với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$, tồn tại các số thực dương M_5, M_6 và c_5 sao cho

$$d_\infty(\eta_1(t), \hat{0}) \le M_5 e^{c_5 t}, \ d_\infty(\eta_2(x), \hat{0}) \le M_6.$$

Với mỗi $\beta > 0$, xét không gian $C^\infty_\beta(\Omega^b_\infty, E)$ các hàm $u \in C(\Omega^b_\infty, E)$ với metric $H^0_\beta(u,v)$ xác định bởi:

$$H^0_\beta(u,v) = \sup_{(t,x)\in\Omega^b_\infty} \left\{ d_\infty(u(t,x), v(t,x)) e^{-\beta t} \right\}$$

sao cho $\sup\limits_{(t,x)\in\Omega_\infty^b} \left\{d_\infty(u(t,x),\hat{0})e^{-\beta t}\right\} < \infty.$

Chứng minh tương tự Bổ đề 2.3, ta được $(C_\beta^\infty(\Omega_\infty^b, E), H_\beta^0)$ là không gian metric đầy đủ với mỗi số thực $\beta > 0$.

Định lí 3.4. *Giả sử $f \in C(\Omega_\infty^b \times C(\Omega_\infty^b, E), E)$ và các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (3.21)-(3.22) trên Ω_∞^b và nghiệm này là duy nhất trong không gian $C_\beta^\infty(\Omega_\infty^b, E)$, với $\beta > 0$ đủ lớn.*

Chứng minh. Với $u \in C_\beta^\infty(\Omega_\infty^b, E)$, ta đặt

$$P_5(u(t,x)) = \psi(t,x) \oplus_F^{RL} \mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)),\ (t,x) \in \Omega_\infty.$$

Vì $u \in C_\beta^\infty(\Omega_\infty^b, E)$ nên tồn tại $\rho_0 > 0$ sao cho

$$d_\infty(u(t,x),\hat{0}) \le \rho_0 e^{\beta t}, \forall\ (t,x) \in \Omega_\infty.$$

Kết hợp với điều kiện $(\mathbf{G_3})$ và $(\mathbf{G_4})$, ta được

$$\begin{aligned} d_\infty(f(t,x,u(t,x)),\hat{0}) &\le d_\infty(f(t,x,u(t,x), f(t,x,\hat{0})) + d_\infty(f(t,x,\hat{0}),\hat{0}) \\ &\le L\rho_0 e^{\beta t} + M_4 e^{c_4 t}. \end{aligned}$$

Với mọi $\beta > c_4 > 0$, ta có

$$\begin{aligned} &d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)),\hat{0}) \\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} d_\infty(f(s,z,u(s,z)),\hat{0}) dzds \\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} \left[L\rho_0 e^{\beta s} + M_4 e^{c_4 s}\right] dsdz \\ &\le \frac{L\rho_0 + M_4}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} e^{\beta s} dsdz. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.1, ta được

$$d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)),\hat{0}) \le (L\rho_0 + M_4) G(\beta, b, q_1, q_2) e^{\beta t}. \tag{3.25}$$

Nếu $\beta \geq \max\{c_4, c_5\}$ thì từ giả thiết $(\mathbf{G_5})$ và (3.25), ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(P_5u(t,x),\hat{0})e^{-\beta t} &\leq 2M_5e^{(c_5-\beta)t} + M_6e^{-\beta t} + (L\rho_0 + M_4)G(\beta,b,q_1,q_2) \\ &\leq 2M_5 + M_6 + (L\rho_0 + M_4)G(\beta,b,q_1,q_2) < \infty \end{aligned} \tag{3.26}$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty$. Điều này chứng tỏ $P_5(u) \in C^\infty_\beta(\Omega^b_\infty, E)$.

Với mọi $u, v \in C^\infty_\beta(\Omega^b_\infty, E)$, từ Bổ đề 3.1 và vì f thỏa mãn điều kiện $(\mathbf{G_3})$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(P_5u(t,x), P_5v(t,x)) &\leq d_\infty\left({}^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+}f(t,x,u(t,x)), {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+}f(t,x,v(t,x))\right) \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}H^0_\beta(u,v)\int_0^t\int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1}e^{\beta s}dsdz \\ &\leq LG(\beta,b,q_1,q_2)H^0_\beta(u,v)e^{\beta t}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Vậy $H^0_\beta(P_5u, P_5v) \leq LG(\beta,b,q_1,q_2)H^0_\beta(u,v)$. Đặt

$$\beta_0 := \inf\{\beta > 0 \text{ sao cho } LG(\beta,b,q_1,q_2) < 1\} \tag{3.28}$$

và $\beta_1 = \max\{\beta_0, c_4, c_5\}$. Khi đó, nếu ta chọn $\beta \geq \beta_1$ đủ lớn thì $LG(\beta,b,q_1,q_2) < 1$. Do đó, P_5 là một ánh xạ co, theo Định lý 1.7, tồn tại duy nhất hàm mờ u xác định trên Ω^b_∞ thỏa mãn phương trình (3.23), nên nó là nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán (3.21) - (3.22) trên Ω^b_∞. Định lý được chứng minh. $\square$

Với mỗi $\beta > 0$, ta xét không gian

$$C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E) = \left\{u \in C^\infty_\beta(\Omega^b_\infty, E) : F^{f,q}_\psi[u](t,x) \in E, (t,x) \in \Omega^b_\infty\right\}.$$

Khi đó, để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán, ta giả thiết

$(\mathbf{G_0})$ $C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E) \neq \emptyset$ và nếu $u \in C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E)$ thì

$$F^{f,q}_\psi[u](t,x) \in C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E), \ \forall (t,x) \in \Omega^b_\infty.$$

Định lí 3.5. *Giả sử $f \in C(\Omega^b_\infty \times C(\Omega^b_\infty, E), E)$ và các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$, $(\mathbf{G_0})$ được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại nghiệm tích phân kiểu 2 của bài toán*

(3.21)-(3.22) trên Ω^b_∞ và nghiệm này là duy nhất trong không gian $C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E)$, với $\beta > 0$ đủ lớn.

Chứng minh. Xét ánh xạ $P_6 : C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E) \to C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E)$ cho bởi

$$P_6(u(t,x)) = \psi(t,x) \ominus_H (-1)^{RL}_F \mathcal{I}^q_{0^+} f(t,x,u(t,x)).$$

Chứng minh tương tự (3.27), ta có

$$d_\infty(P_6 u(t,x),\ P_6 v(t,x)) \leq LG(\beta, b, q_1, q_2) H^0_\beta(u,v) e^{\beta t}.$$

Điều này suy ra $H^0_\beta(P_6 u, P_6 v) \leq LG(\beta, b, q_1, q_2) H^0_\beta(u,v)$. Vì $\beta \geq \beta_1$ nên ta có $LG(\beta, b, q_1, q_2) < 1$. Do đó, P_6 là một ánh xạ co. Mặt khác, chứng minh tương tự Bổ đề 2.2, ta có $(C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E), H^0_\beta)$ là một không gian metric đầy đủ với mỗi số thực dương β. Theo Định lý 1.7, P_6 có duy nhất điểm bất động $u \in C^{\infty,f}_{\beta,\psi}(\Omega^b_\infty, E)$. Định lý được chứng minh. □

3.4. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 3.5. Xét phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số

$${}^C_{gH}\mathcal{D}^q u(t,x) = g(t,x)u(t,x) \oplus h(t,x), \quad (t,x) \in \Omega^b_T = [0,T] \times [0,b], \tag{3.29}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = u(0,x) = u(0,0) = 2C,\ (t,x) \in \Omega^b_T \tag{3.30}$$

trong đó $g(t,x), h(t,x)$ là các hàm đa thức, $q \in [0,1) \times [0,1)$, C là một số mờ.

Đặt $f(t,x,u(t,x)) = g(t,x)u(t,x) \oplus h(t,x)$. Với mọi $(t,x) \in \Omega^b_T$, ta có

$$d_\infty\Big(f(t,x,u(t,x)), f(t,x,v(t,x))\Big) \leq \max_{(t,x)\in\Omega^b_T} |g(t,x)| d_\infty(u(t,x), v(t,x)).$$

Vậy hàm f thỏa mãn điều kiện (3.11) với hằng số Lipschitz $L = \max\limits_{(t,x)\in\Omega^b_T} |g(t,x)|$. Theo Định lý 3.1, bài toán (3.29) - (3.30) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 trong $(C(\Omega^b_T, E), d_r)$.

Với $q=\dfrac{2}{3}, T=1, b=\dfrac{1}{2}, g(t,x)=-\dfrac{9}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}t^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}, h(t,x)=-\dfrac{9}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}t^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}C.$ Khi đó

$$f(t,x,u(t,x))=-\frac{9}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}t^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}u(t,x)-\frac{9t^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}C.$$

Ta có hằng số Lipschitz $L=\dfrac{9}{2\sqrt[3]{2}\Gamma^2(\frac{1}{3})}$, $\psi(t,x)=2C$ và $len[\psi(t,x)]^\alpha=2len[C]^\alpha$, $(t,x)\in\Omega_T^b$.

Mặt khác, dễ kiểm tra được rằng $u(t,x)=c(2-tx)$ là một nghiệm cổ điển của bài toán

$$\begin{cases} {}^CD^q u(t,x)=-\dfrac{9}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}t^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}u(t,x)-\dfrac{9t^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}}{2\Gamma^2(\frac{1}{3})}c,\ (t,x)\in\Omega_1^{\frac{1}{2}}=[0,1]\times[0,\dfrac{1}{2}] \\ u(t,0)=u(0,x)=u(0,0)=2c,\ t\in[0,1], x\in[0,\dfrac{1}{2}]. \end{cases}$$

Sử dụng lược đồ của Buckley - Feuring (xem [16]), bằng cách mờ hóa nghiệm cổ điển dựa trên Nguyên lý suy rộng Zadeh (Định nghĩa 1.2, trang 17), ta tìm được nghiệm mờ của bài toán (3.29)-(3.30) là $u(t,x)=(2-tx)C$ với $(t,x)\in\Omega_1^{\frac{1}{2}}$. Đặt $n_0=\dfrac{9}{\Gamma^2(\frac{1}{3})}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big[(-1)\,{}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,u(t,x))\Big]^\alpha \\
&\qquad=\Big[\frac{n_0}{2\Big[\Gamma(\frac{2}{3})\Big]^2}\int_0^t\int_0^x(t-s)^{-\frac{1}{3}}(x-z)^{-\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}u(s,z)dzds\Big]^\alpha \\
&\qquad\quad+\Big[\frac{n_0}{2\Big[\Gamma(\frac{2}{3})\Big]^2}\int_0^t\int_0^z(t-s)^{-\frac{1}{3}}(x-z)^{-\frac{1}{3}}s^{\frac{4}{3}}z^{\frac{4}{3}}Cdzds\Big]^\alpha \\
&\qquad=\frac{n_0[u]^\alpha tx}{2}\Gamma^2(\frac{4}{3})+\frac{n_0[C]^\alpha t^2x^2}{8}\Gamma^2(\frac{7}{3})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&len\Big[(-1)\,{}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,u(t,x))\Big]^\alpha \\
&\qquad=len[C]^\alpha\Big[\frac{n_0(2-tx)tx}{2}\Gamma^2(\frac{4}{3})+\frac{n_0t^2x^2}{4}\Gamma^2(\frac{7}{3})\Big] \\
&\qquad\le len[C]^\alpha\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\Big)=\frac{5}{9}len[C]^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Điều này có nghĩa $len[\psi(t,x)]^\alpha \geq len\Big[(-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,u(t,x))\Big]^\alpha$. Theo Mệnh đề 1.1, ta thấy hiệu $\psi(t,x)\ominus_H (-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,u(t,x))$ tồn tại.

Đặt $\nu(t,x) = \psi(t,x)\ominus_H (-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,u(t,x))$, $(t,x)\in\Omega_1^{\frac{1}{2}}$. Lập luận tương tự như (3.31), ta được

$$[(-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,\nu(t,x))]^\alpha = \frac{tx[\nu]^\alpha}{2} + \frac{2t^2x^2[C]^\alpha}{9}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
len\Big[(-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,\nu(t,x))\Big]^\alpha &\leq \frac{tx}{2}len[\nu]^\alpha + \frac{2}{9}t^2x^2len[C]^\alpha\\
&= \frac{tx}{2}len[C]^\alpha\Big[2-\frac{(2-tx)tx}{2}-\frac{4}{9}t^2x^2\Big]+\frac{2}{9}t^2x^2len[C]^\alpha\\
&= \frac{tx}{2}len[C]^\alpha\Big(2-tx+\frac{t^2x^2}{18}\Big)+\frac{2}{9}t^2x^2len[C]^\alpha\\
&\leq \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\Big)len[C]^\alpha = \frac{5}{9}len[C]^\alpha.
\end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $(t,x)\in\Omega_1^{\frac{1}{2}}$, hiệu $\psi(t,x)\ominus_H (-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{2}{3}}_{0+}f(t,x,\nu(t,x))$ tồn tại. Do đó, trong trường hợp này, bài toán (3.29) - (3.30) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 2 trong $C(\Omega_1^{\frac{1}{2}},E)$.

Ví dụ 3.6. Xét phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số

$$^{C}_{gH}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}u(x,y) = xyC,\quad (x,y)\in\Omega_1^1=[0,1]\times[0,1] \tag{3.33}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(x,0)=xC,\ x\in[0,1], u(0,y)=yC,\ y\in[0,1],\ u(0,0)=\hat{0} \tag{3.34}$$

trong đó $C=(1,2,3)$.

Với $(x,y)\in\Omega_1^1$, ta đặt $f(x,y,u(x,y))=(xy,2xy,3xy)$. Chọn $R=\dfrac{d_\infty(C,\hat{0})}{4}$. Dễ thấy $f:\Omega_1^1\times B(\tilde{0},R)\to E_c$ là ánh xạ compact. Hơn nữa, ta có $\psi(x,y) = (x+y)C$ và $^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}_{0+}f(x,y,u(x,y)) = \dfrac{9\pi}{16}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}C$. Điều này suy ra $[\psi(x,y)]^\alpha = (x+y)[\alpha+1,3-\alpha]$ và

$$[(-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}_{0+}f(x,y,u(x,y))]^\alpha = \Big[-\frac{9\pi}{16}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}(3-\alpha),\frac{9\pi}{16}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}(\alpha+1)\Big]$$

Khi đó, ta có $len[\psi(x,y)]^\alpha = (x+y)(2-2\alpha)$ và

$$len[(-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x,y,u(x,y))]^\alpha = \frac{9\pi}{16} x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} (2-2\alpha).$$

Do đó, $len[\psi(x,y)]^\alpha \geq len[(-1)_F^{RL}\mathcal{I}^{\frac{1}{2}} f(x,y,u(x,y))]^\alpha,\ (x,y) \in \Omega_1^1$. Vậy hiệu Hukuhara $\psi(x,y) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x,y,u(x,y))$ tồn tại với mọi $(x,y) \in \Omega_1^1$. Tương tự, chúng ta cũng chỉ ra tồn tại hiệu

$$\psi(x,y) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x,y,\nu(x,y)),$$

trong đó $\nu(x,y) = \psi(x,y) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}} f(x,y,u(x,y)), (x,y) \in \Omega_1^1$. Từ các nhận xét trên, chúng ta thấy rằng các giả thiết của Định lý 3.3 được thỏa mãn, do đó bài toán (3.33)-(3.34) có ít nhất một nghiệm tích phân kiểu 2 trên $\Omega_* \subset \Omega_1^1$.

Ví dụ 3.7. Xét phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số

$$ {}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q u(t,x) = \frac{1}{3} e^{2x+1} u(t,x),\ \ (t,x) \in \Omega_\infty^2 = [0,+\infty) \times [0,2] \tag{3.35}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = \frac{1}{t+1} C, t \in [0,+\infty),\ u(0,x) = C, x \in [0,2], \tag{3.36}$$

trong đó $q = (q_1, q_2) \in [0,1) \times [0,1)$, C là một số mờ.

Đặt $f(t,x,u(t,x)) = \dfrac{1}{3} e^{2x+1} u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_\infty^2$. Dễ thấy, f thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz $L = \dfrac{e^5}{3}$ và $f(t,x,\hat{0}) = \hat{0}$. Mặt khác, vì $u(t,0) = \eta_1(t) = \dfrac{1}{t+1} C$, $u(0,x) = \eta_2(x) = C$ nên các điều kiện $(\mathbf{G_4}) - (\mathbf{G_5})$ được thỏa mãn. Theo Định lý 3.4, bài toán (3.35)-(3.36) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 trên Ω_∞^2.

Thêm vào đó, nếu giả sử hiệu $\psi(t,x) \ominus_H \dfrac{-1}{3} e^{2x+1} u(t,x)$ và

$$\psi(t,x) \ominus_H \frac{-1}{3} e^{2x+1} \nu(t,x)$$

tồn tại trong đó $\nu(t,x) = \psi(t,x) \ominus_H \dfrac{-1}{3} e^{2x+1} u(t,x)$ với mọi $(t,x) \in \Omega^2_\infty$ thì theo Định lý 3.5, bài toán (3.35) - (3.36) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 2 trên Ω^2_∞.

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số với điều kiện biên địa phương. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Định nghĩa đạo hàm bậc phân số cho hàm hai biến giá trị mờ. Dựa trên khái niệm đạo hàm Hukuhara suy rộng và định nghĩa tích phân Riemann-Liouville cho hàm mờ, chúng tôi định nghĩa đạo hàm gH-Caputo cho hàm mờ dạng ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(x,y) = {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{1-q}_{0^+}\big(D_{xy}u(x,y)\big),\ (x,y) \in J_{ab}$ cùng nhiều ví dụ minh họa.

2) Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic mờ bậc phân số với điều kiện vế phải thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Phương pháp sử dụng là nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian các hàm mờ có trọng thỏa mãn tính chất là không gian metric đầy. Kết quả nhận được trong cả miền bị chặn và miền vô hạn.

3) Khi vế phải chỉ thỏa mãn điều kiện bị chặn mà không thỏa mãn điều kiện Lipschitz, bằng cách sử dụng một phiên bản của Định lý Schauder trong không gian metric nửa tuyến tính, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại của nghiệm tích phân của bài toán. Các kết quả nhận được cho sự tồn tại cả nghiệm kiểu 1 và nghiệm kiểu 2 (bán kính tập mức giảm) trên miền bị chặn.

Từ những kết quả này, chúng tôi có thể có những kết quả nghiên cứu sâu hơn về các tính chất định tính của nghiệm khi biến thời gian tiến ra vô hạn (trong chương 4).

Chương 4
MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐỊNH TÍNH CỦA NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG MỜ DẠNG HYPERBOLIC BẬC PHÂN SỐ

Không giống như tính ổn định thông thường, ổn định Ulam có thể đảm bảo sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm, miễn là có một nghiệm xấp xỉ với sai số xác định cho trước. Do vậy, ổn định Ulam không chỉ thiết lập nền tảng quan trọng cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân mà còn cung cấp cơ sở lý thuyết cho việc giải xấp xỉ phương trình vi phân. Obloza [48] là tác giả đầu tiên nghiên cứu tính ổn định Ulam của phương trình vi phân tuyến tính. Sau đó, một số nhà toán học đã nghiên cứu tính ổn định Ulam của nhiều loại phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng theo các cách tiếp cận khác nhau [2, 58]. Tuy nhiên, có rất ít kết quả về sự ổn định của Ulam đối với phương trình vi phân chứa yếu tố mờ. Cho đến nay, tất cả các kết quả hiện có được nghiên cứu bởi Shen và Wang [54, 55].

Trong chương này, dựa trên các kết quả đạt được chương 3, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất định tính của nghiệm của phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số. Kết quả đầu tiên về tính ổn định Ulam, bao gồm ổn định Hyers-Ulam và ổn định Hyers-Ulam-Rassias dưới tính khả vi Hukuhara suy rộng, được thể hiện trong các Định lý 4.1 và 4.2.

Bên cạnh đó, năm 1997, Ding và Kandel [23] cũng đã đưa ra nghiên cứu mở đầu về tính ổn định của phương trình vi phân mờ. Sau đó, Diamond [21] đã nghiên cứu tính ổn định Lyapunov của phương trình vi phân mờ bằng cách sử dụng phương pháp bao hàm thức vi phân. Cecconello và cộng sự [17, 19] nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm mờ bằng cách sử dụng nguyên lý suy rộng Zadeh. Trong [18], Cecconello đã thiết lập các điều kiện cho sự tồn tại và tính ổn định của các tập bất biến đối với các hệ động lực trên không gian mờ. Các kết quả được trình bày trong [18] là sự tổng quát về sự tồn tại và tính ổn định của điểm cân bằng và tính tuần hoàn của các nghiệm của phương trình vi phân mờ. Mizukoshi và các cộng sự [43] cũng đã nghiên cứu tính ổn định của hệ động lực mờ.

Khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm của hệ động lực được minh họa bởi phương trình đạo hàm riêng, một vấn đề quan trọng là tính ổn định của nghiệm gần tới điểm cân bằng. Theo ý nghĩa vật lý, nếu các nghiệm chuyển động ở rất gần điểm cân bằng u_0 và ở gần điểm cân bằng u_0 mãi thì u_0 là ổn định Lyapunov. Do đó, kết quả thứ hai trong chương này, chúng tôi chỉ ra điều kiện để điểm cân bằng của bài toán là ổn định. Tính ổn định đối với biến thời gian của điểm cân bằng khi $t \to \infty$ được hiểu theo nghĩa ổn định Lyapunov, kết quả được thể hiện trong Định lý 4.3.

Nội dung của chương được trình bày dựa trên bài báo số 4 và số 5 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Tính ổn định Ulam

Trong phần này, chúng tôi trình bày các khái niệm và chứng minh tính ổn định Ulam của bài toán

$$ {}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),\ (t,x) \in \Omega^b_\infty = [0,\infty) \times [0,b] \tag{4.1}$$

$$ u(t,0) = \eta_1(t), \quad t \in [0,\infty),\ u(0,x) = \eta_2(x),\ x \in [0,b] \tag{4.2}$$

trong đó $f : \Omega^b_\infty \times C(\Omega^b_\infty, E) \to E$, $\eta_1 \in C([0,\infty), E)$, $\eta_2 \in C([0,b], E)$ là các hàm cho trước sao cho các hiệu $\eta_1(t) \ominus_H u(0,0), \eta_2(x) \ominus_H u(0,0)$ tồn tại với $t \in [0,\infty), x \in [0,b]$ và $\eta_1(0) = \eta_2(0) = u(0,0)$.

Các khái niệm về nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.2) được định nghĩa bởi Định nghĩa 3.5 (trang 80).

4.1.1. Tính ổn định Hyers-Ulam

Với mọi $\varepsilon > 0$, ta xét bất phương trình

$$d_\infty({}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q v(t,x), f(t,x,v(t,x))) \leq \varepsilon,\ (t,x) \in \Omega_\infty^b. \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.1.

1) Hàm $v \in \mathcal{W}_1(\Omega_\infty^b, E)$ được gọi là một nghiệm kiểu 1 của bất phương trình (4.3) nếu tồn tại hàm $h_1 \in C(\Omega_\infty^b, E)$ sao cho

   (i) $d_\infty(h_1(t,x), \hat{0}) \leq \varepsilon,\ (t,x) \in \Omega_\infty^b$;

   (ii) ${}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x), (t,x) \in \Omega_\infty^b$.

2) Hàm $v \in \mathcal{W}_2(\Omega_\infty^b, E)$ được gọi là một nghiệm kiểu 2 của bất phương trình (4.3) nếu tồn tại hàm $h_2 \in C(\Omega_\infty^b, E)$ sao cho

   (i) $d_\infty(h_2(t,x), \hat{0}) \leq \varepsilon,\ (t,x) \in \Omega_\infty^b$;

   (ii) ${}_{gH}^{C}\mathcal{D}^q v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_2(t,x), (t,x) \in \Omega_\infty^b$

Mệnh đề 4.1.

1) Nếu v là một nghiệm kiểu 1 của bất phương trình (4.3) thì v thỏa mãn bất phương trình tích phân

$$\begin{aligned}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)d_\infty\big(v(t,x),&v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0)\\ &\oplus_F^{RL} \mathcal{I}_{0^+}^q f(t,x,v(t,x))\big) \leq \varepsilon t^{q_1} x^{q_2}\end{aligned} \tag{4.4}$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty^b$.

2) Nếu v là một nghiệm kiểu 2 của bất phương trình (4.3) thì v thỏa mãn bất phương trình tích phân

$$\begin{aligned}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)d_\infty\big(v(t,x), v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0)&\\ \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0^+}^q f(t,x,v(t,x))\big) \leq \varepsilon t^{q_1} x^{q_2}&\end{aligned} \tag{4.5}$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty^b$.

Chứng minh.

(1) Giả sử $v(t,x)$ là một nghiệm kiểu 1 của bất phương trình (4.3). Khi đó, tồn tại hàm $h_1 \in C(\Omega^b_\infty, E)$ sao cho

$$ {}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x) \ (t,x) \in \Omega^b_\infty. $$

Theo Định nghĩa 3.3 của ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q v(t,x)$, ta có

$$ {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{1-q}_{0+} D_{tx} v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x). $$

Do đó

$$ {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}\, {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{1-q}_{0+} D_{tx} v(t,x) = {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}[f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x)]. $$

Từ Mệnh đề 3.1, ta có

$$ \int_0^t \int_0^x D_{sz} v(s,z) dz ds = {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}[f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x)]. \tag{4.6} $$

Vì $v \in \mathcal{W}_1(\Omega^b_\infty, E)$ nên lập luận tương tự Mệnh đề 3.2, ta được

$$ v(t,x) = v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \oplus {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}[f(t,x,v(t,x)) \oplus h_1(t,x)], \tag{4.7} $$

với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$. Khi đó, ta có

$$ \begin{aligned} d_\infty(v(t,x), v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \oplus {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+} f(t,x,v(t,x))) \\ &\le d_\infty({}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+} h_1(t,x), \hat{0}) \\ &\le \frac{\varepsilon}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} dz ds \\ &\le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}. \end{aligned} $$

(2) Giả sử $v \in \mathcal{W}_2(\Omega^b_\infty, E)$ là một nghiệm kiểu 2 của bất phương trình (4.3). Chứng minh tương tự như trên, ta được

$$ v(t,x) = v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1) {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+}[f(t,x,v(t,x)) \oplus h_2(t,x)] $$

Khi đó, áp dụng Mệnh đề 1.3, ta cũng có đánh giá

$$\begin{aligned}
d_\infty(v(t,x), v(t,0)\oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1){}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,v(t,x)))& \\
\le d_\infty({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q h_2(t,x), \hat{0})& \\
\le \frac{\varepsilon}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1} dz ds& \\
\le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}&
\end{aligned}$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty^b$. Mệnh đề được chứng minh. □

Định nghĩa 4.2.

1) Hàm $v \in C(\Omega_\infty^b, E)$ được gọi là nghiệm tích phân kiểu 1 của bất phương trình (4.3) nếu nó thỏa mãn (4.4).

2) Hàm $v \in C(\Omega_\infty^b, E)$ được gọi là nghiệm tích phân kiểu 2 của bất phương trình (4.3) nếu nó thỏa mãn (4.5).

Định nghĩa 4.3. Bài toán (4.1)-(4.2) được gọi là ổn định Hyers-Ulam kiểu k ($k = 1,2$) nếu tồn tại $c_o > 0$ sao cho với $\varepsilon > 0$ bất kỳ và mỗi nghiệm tích phân v kiểu k của bất phương trình (4.3), tồn tại một nghiệm tích phân u kiểu k của bài toán (4.1)-(4.2) sao cho $H_\beta^0(u,v) \le c_o\varepsilon$.

Định lí 4.1.

1) Giả sử $f \in C(\Omega_\infty^b \times C(\Omega_\infty^b, E), E)$ và các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ (trang 80) đúng. Khi đó, bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam kiểu 1.

2) Giả sử $f \in C(\Omega_\infty^b \times C(\Omega_\infty^b, E), E)$, các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ (trang 80) và $(\mathbf{G_0})$ (trang 82) được thỏa mãn. Khi đó, bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam kiểu 2.

Chứng minh. Giả sử $v \in C(\Omega_\infty^b, E)$ là một nghiệm tích phân kiểu 1 của bất phương trình (4.3). Vì các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ đúng nên theo Định lý 3.4, ta thấy rằng bài toán (4.1)-(4.2) với điều kiện địa phương dạng

$$\eta_1(t) = v(t,0),\ t \in [0,\infty),\ \ \eta_2(x) = v(0,x),\ x \in [0,b]$$

có duy nhất một nghiệm tích phân $u(t,x)$ kiểu 1 thỏa mãn

$$u(t,x) = v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \oplus_F^{RL} \mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x))$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty^b$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} &d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \\ &\quad \le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} + d_\infty\big({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,u(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^{q} f(t,x,v(t,x))\big). \end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá tương tự (3.27), ta được

$$d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} + LG(\beta, b, q_1, q_2) H_\beta^0(u,v) e^{\beta t}. \quad (4.8)$$

Nhân cả hai vế bất phương trình (4.8) với $e^{-\beta t}$ ta được

$$e^{-\beta t} d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{e^{\beta t}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} + LG(\beta, b, q_1, q_2) H_\beta^0(u,v). \quad (4.9)$$

Với $\beta \ge q_1$, ta có

$$\max_{t \in [0,\infty)} \frac{t^{q_1}}{e^{\beta t}} = \frac{q_1^{q_1}}{e^{\beta q_1}}.$$

Lấy supremum cả hai vế của bất đẳng thức (4.9) ta được

$$H_\beta^0(u,v) \le \frac{\varepsilon q_1^{q_1} b^{q_2}}{e^{\beta q_1}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} + LG(\beta, b, q_1, q_2) H_\beta^0(u,v).$$

Từ Nhận xét 3.1, ta có thể chọn $\beta \ge 0$ đủ lớn sao cho

$$c_o := \frac{q_1^{q_1} b^{q_2}}{e^{\beta q_1}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)\Big[1 - LG(\beta, b, q_1, q_2)\Big]} > 0$$

Do đó, ta được $H_\beta^0(u,v) \le c_o \varepsilon$. Bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam kiểu 1.

Mặt khác, khi bổ sung điều kiện ($\mathbf{G_0}$) (trang 82), vì các điều kiện của Định lý 3.5 được thỏa mãn nên bài toán (4.1)-(4.2) với điều kiện địa phương dạng

$$\eta_1(t) = v(t,0),\ t \in [0,\infty),\ \eta_2(x) = v(0,x),\ x \in [0,b]$$

có duy nhất một nghiệm tích phân $u(t,x)$ kiểu 2 thỏa mãn

$$u(t,x) = v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1)\, {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+} f(t,x,u(t,x)),\ \forall\, (t,x) \in \Omega^b_\infty.$$

Từ tính chất $iv)$ của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3 (trang 24), ta có

$$\begin{aligned} &d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \\ &\quad \le \frac{\varepsilon t^{q_1} x^{q_2}}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} + d_\infty\big({}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+} f(t,x,u(t,x)), {}^{RL}_{F}\mathcal{I}^{q}_{0+} f(t,x,v(t,x))\big). \end{aligned}$$

Tiếp tục lập luận tương tự như đối với chứng minh tính ổn định Hyers-Ulam kiểu 1, ta cũng chỉ ra được rằng với $\beta > 0$ đủ lớn tồn tại

$$c_o := \frac{q_1^{q_1} b^{q_2}}{e^{\beta q_1}\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)\Big[1 - LG(\beta, b, q_1, q_2)\Big]} > 0$$

sao cho $H^0_\beta(u,v) \le c_o\varepsilon$. Điều này có nghĩa bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam kiểu 2. Định lý được chứng minh. □

4.1.2. Tính ổn định Hyers-Ulam-Rassias

Với $\Phi \in L^1(\Omega^b_\infty, [0,\infty)) \cap L^\infty(\Omega^b_\infty, [0,\infty))$, ta xét bất phương trình

$$d_\infty({}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q v(t,x), f(t,x,v(t,x))) \le \Phi(t,x),\ (t,x) \in \Omega^b_\infty. \tag{4.10}$$

Định nghĩa 4.4.

1) Hàm $v \in \mathcal{W}_1(\Omega^b_\infty, E)$ là một nghiệm kiểu 1 của bất phương trình (4.10) nếu tồn tại hàm $h_3 \in C(\Omega^b_\infty, E)$ sao cho

   (i) $d_\infty(h_3(t,x), \hat{0}) \le \Phi(t,x),\ (t,x) \in \Omega^b_\infty$,

   (ii) ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_3(t,x),\ (t,x) \in \Omega^b_\infty$.

2) Hàm $v \in \mathcal{W}_2(\Omega^b_\infty, E)$ là một nghiệm kiểu 2 của bất phương trình (4.10) nếu tồn tại hàm $h_4 \in C(\Omega^b_\infty, E)$ sao cho

   (i) $d_\infty(h_4(t,x), \hat{0}) \le \Phi(t,x)$, $(t,x) \in \Omega^b_\infty$,

   (ii) ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}^q v(t,x) = f(t,x,v(t,x)) \oplus h_4(t,x)$, $(t,x) \in \Omega^b_\infty$.

Chứng minh tương tự Mệnh đề 4.1, ta được kết quả sau:

Mệnh đề 4.2.

1) Nếu v là một nghiệm tích phân kiểu 1 của bất phương trình (4.10) thì v thỏa mãn bất phương trình tích phân sau với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$

$$d_\infty(v(t,x), v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \oplus^{RL}_{F} \mathcal{I}^q_{0+} f(t,x,v(t,x)) \\ \le^{RL} I^q_{0+}\Phi(t,x). \tag{4.11}$$

2) Nếu v là một nghiệm tích phân kiểu 2 của bất phương trình (4.10) thì v thỏa mãn bất phương trình tích phân sau với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$

$$d_\infty(v(t,x), v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1)^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+} f(t,x,v(t,x))) \\ \le^{RL} I^q_{0+}\Phi(t,x). \tag{4.12}$$

Định nghĩa 4.5.

1) Hàm $v \in C(\Omega^b_\infty, E)$ được gọi là nghiệm tích phân kiểu 1 của bất phương trình (4.10) nếu nó thỏa mãn (4.11).

2) Hàm $v \in C(\Omega^b_\infty, E)$ được gọi là nghiệm tích phân kiểu 2 của bất phương trình (4.10) nếu nó thỏa mãn (4.12).

Định nghĩa 4.6. Bài toán (4.1) - (4.2) được gọi là ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu k ($k = 1,2$) theo Φ nếu tồn tại một số thực $c_{f,\Phi} > 0$ sao cho với mỗi nghiệm tích phân v kiểu k của bất phương trình (4.10), tồn tại một nghiệm tích phân u kiểu k của bài toán (4.1)- (4.2) sao cho

$$H^0_\beta(u,v) \le c_{f,\Phi} \sup_{(t,x)\in\Omega^b_\infty} \Phi(t,x).$$

Định lí 4.2. *Giả sử* $f \in C(\Omega_\infty^b \times C(\Omega_\infty^b, E), E)$, *các giả thiết* $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ *(trang 80) đúng và với mỗi hàm* $\Phi \in L^1(\Omega_\infty^b, [0, +\infty)) \cap L^\infty(\Omega_\infty^b, [0, \infty))$, *tồn tại* $m_\Phi > 0$, $\nu \geq 0$ *sao cho*

$$^{RL}I_{0+}^q \Phi(t,x) \leq m_\Phi e^{\nu t} \Phi(t,x), \ \forall (t,x) \in \Omega_\infty^b. \tag{4.13}$$

Khi đó, bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 1. Hơn nữa, nếu giả sử thêm rằng điều kiện $(\mathbf{G_0})$ *(trang 82) được thỏa mãn thì bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 2.*

Chứng minh. Trong định lý này, chúng tôi đi chứng minh chi tiết tính ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 2 của bài toán (4.1)- (4.2). Tính ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 1 của bài toán được chứng minh tương tự dựa trên các kết quả Định lý 3.4 và Mệnh đề 1.3. Giả sử $v \in C(\Omega_\infty^b, E)$ là một nghiệm tích phân kiểu 2 của bất phương trình (4.10). Bởi các giả thiết $(\mathbf{G_3}) - (\mathbf{G_5})$ (trang 80) và $(\mathbf{G_0})$ (trang 82) đúng nên theo Định lý 3.5, ta thấy rằng bài toán (4.1)-(4.2) với điều kiện địa phương dạng

$$\eta_1(t) = v(t,0), \, t \in [0, \infty), \ \eta_2(x) = v(0,x), \, x \in [0,b]$$

có duy nhất một nghiệm tích phân $u(t,x)$ kiểu 2 thỏa mãn

$$u(t,x) = v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x))$$

với mọi $(t,x) \in \Omega_\infty^b$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \\
&\quad \leq d_\infty(v(t,0) \oplus v(0,x) \ominus_H v(0,0) \ominus_H (-1)_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)), v(t,x)) \\
&\quad \leq^{RL} I_{0+}^q \Phi(t,x) + d_\infty\big({}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,u(t,x)), {}_F^{RL}\mathcal{I}_{0+}^q f(t,x,v(t,x))\big).
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự (3.27), ta được

$$d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \leq^{RL} I_{0+}^q \Phi(t,x) + LG(\beta, b, q_1, q_2) H_\beta^0(u,v) e^{\beta t}. \tag{4.14}$$

Từ giả thiết (4.13), ta thấy với mọi $\beta > \nu$ thì

$$e^{-\beta t} d_\infty(u(t,x), v(t,x)) \le m_\Phi \Phi(t,x) + LG(\beta, b, q_1, q_2) H^0_\beta(u,v).$$

Từ Nhận xét 3.1, ta cũng có thể chọn $\beta \ge 0$ sao cho

$$c_{f,\Phi} = \frac{m_\Phi}{1 - LG(\beta, b, q_1, q_2)} > 0.$$

Điều này suy ra rằng $H^0_\beta(u,v) \le c_{f,\Phi} \sup\limits_{(t,x)\in\Omega^b_\infty} \Phi(t,x)$. Do đó, bài toán (4.1)-(4.2) là ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 2. Định lý được chứng minh. □

4.2. Tính ổn định Lyapunov

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bài toán

$$^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),\ (t,x) \in \Omega^b_\infty = [0,\infty) \times [0,b] \qquad (4.1)$$

$$u(t,0) = \eta_1(t), \quad t \in [0,\infty),\ u(0,x) = \eta_2(x),\ \ x \in [0,b] \qquad (4.2)$$

với giả thiết $f : \Omega^b_\infty \times C(\Omega^b_\infty, E) \to E, f(t,x,\hat{0}) \equiv \hat{0}$, $\eta_1 \in C([0,\infty), E)$, $\eta_2 \in C([0,b], E)$ là các hàm cho trước sao cho các hiệu $\eta_1(t) \ominus_H \eta_1(0)$, $\eta_2(x) \ominus_H \eta_1(0)$ tồn tại với mọi $t \ge 0, x \in [0,b]$ và $\eta_1(0) = \eta_2(0) = u(0,0)$.

Trong trường hợp này, số mờ $\hat{0}$ được gọi là một điểm cân bằng của hệ động lực được xác định bởi phương trình (4.1).

Định nghĩa 4.7. Điểm cân bằng $\hat{0}$ của bài toán (4.1)-(4.2) được gọi là ổn định theo biến t nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu

$$d_\infty(\eta_1(t), \hat{0}) < \delta,\ t \ge 0, \quad d_\infty(\eta_2(x), \hat{0}) < \delta,\ x \in [0,b]$$

thì tất cả các nghiệm $u(t,x)$ của bài toán (4.1)- (4.2) thỏa mãn

$$d_\infty(u(t,x), \hat{0}) < \varepsilon \text{ với mọi } (t,x) \in \Omega^b_\infty.$$

Để chứng minh tính ổn định của bài toán (4.1)- (4.2), ta giả sử hàm f thỏa mãn điều kiện

$(\mathbf{G_3'})$ Tồn tại $\beta > 1$ sao cho

$$d_\infty(f(t,x,\phi_1(t,x)), f(t,x,\phi_2(t,x))) \le L(t+1)^{-\beta} d_\infty(\phi_1(t,x), \phi_2(t,x))$$

với mọi $\phi_1, \phi_2 \in C(\Omega^b_\infty, E)$, $(t,x) \in \Omega^b_\infty$ và xét bổ đề sau

Bổ đề 4.1. *[49] Giả sử $r(t,x), a(t,x)$ và $b(t,x)$ là các hàm số thực liên tục không âm xác định với mọi $t, x \in \mathbb{R}_+$. Nếu*

$$r(t,x) \le a(t,x) + \int_0^t \int_0^x b(s,z) r(s,z) dz ds, \ t, x \in \mathbb{R}_+$$

thì

$$r(t,x) \le \max_{(s,z)\in[0,t]\times[0,x]} a(s,z) \exp\Big(\int_0^t \int_0^x b(s,z) dz ds \Big) \quad \text{với mọi } t, x \in \mathbb{R}_+.$$

Định lí 4.3. *Giả sử $f \in C(\Omega^b_\infty \times C(\Omega^b_\infty, E), E)$ và các giả thiết $(\mathbf{G_3'})$, $(\mathbf{G_5})$ (trang 80) được thỏa mãn. Khi đó, điểm cân bằng $\hat{0}$ của bài toán là ổn định.*

Chứng minh. Theo giả thiết $(\mathbf{G_3'})$, tồn tại $\beta > 1$ sao cho

$$d_\infty(f(t,x,u(t,x)), f(t,x,v(t,x))) \le L(t+1)^{-\beta} d_\infty(u(t,x), v(t,x))$$

với mọi $(t,x) \in \Omega^b_\infty$. Điều này suy ra

$$d_\infty(f(t,x,u(t,x)), f(t,x,v(t,x))) < L d_\infty(u(t,x), v(t,x)), t \ge 0, x \in [0,b].$$

Do đó, điều kiện $(\mathbf{G_3})$ được thỏa mãn. Theo Định lý 3.4, với mỗi điều kiện ban đầu (4.2), phương trình (4.1) có duy nhất nghiệm tích phân kiểu 1 trên Ω^b_∞.

Giả sử $u(t,x)$ là một nghiệm tích phân kiểu 1 của bài toán. Từ tính chất *ii)* của metric d_∞ trong Mệnh đề 1.3 và giả thiết $(\mathbf{G_3'})$, ta có

$$\begin{aligned} d_\infty(u(t,x), \hat{0}) &\le d_\infty(\psi(t,x), \hat{0}) + d_\infty({}^{RL}_{F}\mathcal{I}^q_{0+} f(t,x,u(t,x)), \hat{0}) \\ &\le d_\infty(\psi(t,x), \hat{0}) \\ &\quad + \frac{L}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \int_0^t \int_0^x (t-s)^{q_1-1} (x-z)^{q_2-1} (s+1)^{-\beta} d_\infty(u(s,z), \hat{0}) dz ds. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 4.1, ta nhận được

$$d_\infty(u(t,x),\hat{0}) \le \max_{(s,z)\in[0,t]\times[0,x]} d_\infty(\psi(s,z),\hat{0})$$
$$\times \exp\Big(\frac{L}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\int_0^t\int_0^x (t-s)^{q_1-1}(x-z)^{q_2-1}(s+1)^{-\beta}dzds\Big).$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-\beta}ds\\
&\qquad = \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-\beta}ds + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-\beta}ds\\
&\qquad \le \Big(\frac{t}{2}\Big)^{q_1-1}\int_0^{\frac{t}{2}}(s+1)^{-\beta}ds + \Big(\frac{t}{2}+1\Big)^{-\beta}\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{q_1-1}ds\\
&\qquad \le \Big(\frac{t}{2}\Big)^{q_1-1}\frac{1-\Big(\frac{t}{2}+1\Big)^{1-\beta}}{\beta-1} + \Big(\frac{t}{2}+1\Big)^{-\beta}\frac{\Big(\frac{t}{2}\Big)^{q_1-1}}{q_1}
\end{aligned}\tag{4.15}$$

với $\beta > 1$.

Hơn nữa, với mọi $t \ge 0, \beta > 1, q_1 \in (0,1)$, dễ thấy rằng

$$\frac{1-\Big(\frac{t}{2}+1\Big)^{1-\beta}}{\beta-1} \le \frac{1}{1-q_1}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1-q_1}.\tag{4.16}$$

Kết hợp (4.15) và (4.16), ta được

$$\int_0^t (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-\beta}ds \le \frac{1}{1-q_1}+\frac{1}{q_1}, \text{với } \beta > 1.\tag{4.17}$$

Từ đó suy ra

$$d_\infty(u(t,x),\hat{0}) \le \max_{(s,z)\in[0,t]\times[0,x]} d_\infty(\psi(s,z),\hat{0})e^{\frac{Lb^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2+1)}\left(\frac{1}{1-q_1}+\frac{1}{q_1}\right)}.$$

Như vậy với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \varepsilon e^{-\frac{Lb^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2+1)}\left(\frac{1}{1-q_1}+\frac{1}{q_1}\right)} > 0$, sao cho các hàm η_1, η_2 thỏa mãn

$$\max_{s\in[0,t]} d_\infty(\eta_1(s),\hat{0}) < \frac{\delta}{3} \text{ và } \max_{z\in[0,x]} d_\infty(\eta_2(z),\hat{0}) < \frac{\delta}{3}.$$

Điều này có nghĩa

$$\max_{(s,z)\in[0,t]\times[0,x]} d_\infty(\psi(t,x),\hat{0}) \le \max_{s\in[0,t]} d_\infty(\eta_1(s),\hat{0}) + \max_{z\in[0,x]} d_\infty(\eta_2(z),\hat{0})$$
$$+ d_\infty(\eta_1(0),\hat{0}) < \delta.$$

Khi đó, ta được $d_\infty(u(t,x),\hat{0}) < \varepsilon,\ \forall\ (t,x) \in \Omega^b_\infty$. Vậy điểm cân bằng $\hat{0}$ của bài toán (4.1)- (4.2) là ổn định. □

4.3. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 4.1. Xét phương trình đạo hàm riêng hyperbolic mờ bậc phân số sau

$$^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(t,x) = \frac{1}{e^{t+x+5}+t+2}u(t,x),\ (t,x) \in \Omega^3_\infty = [0,\infty)\times[0,3] \tag{4.18}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = (t+1)C,\ t \in [0,\infty),\ u(0,x) = e^x C,\ x \in [0,3] \tag{4.19}$$

trong đó $q = (q_1,q_2) \in [0,1)\times[0,1)$ và C là một số mờ.

Với mọi $(t,x) \in \Omega^3_\infty$, ta đặt

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{e^{t+x+5}+t+2}u(t,x).$$

Khi đó, dễ thấy rằng

$$d_\infty(f(t,x,u(t,x)), f(t,x,v(t,x))) \le \frac{1}{e^5+2} d_\infty(u(t,x),v(t,x))$$

và $f(t,x,\hat{0}) = \hat{0}$. Do đó, f thỏa mãn giả thiết $(\mathbf{G_3})$ và $(\mathbf{G_4})$. Hơn nữa, với mọi $(t,x) \in \Omega^3_\infty$, ta có

$$d_\infty(u(t,0),\hat{0}) \le e^t d_\infty(C,\hat{0}) \text{ và } d_\infty(u(0,x),\hat{0}) \le e^3 d_\infty(C,\hat{0}).$$

Như vậy, điều kiện $(\mathbf{G_5})$ được thỏa mãn với $M_5 = d_\infty(C,\hat{0}), M_6 = e^3 d_\infty(C,\hat{0})$ và $c_5 = 1$. Theo Định lý 3.4, bài toán (4.18) -(4.19) có duy nhất một nghiệm tích phân kiểu 1 trên Ω^3_∞. Thêm vào đó, theo Định lý 4.1, bài toán (4.18)-(4.19) là ổn định Hyers-Ulam kiểu 1.

Mặt khác, nếu ta chọn $\Phi(t,x) = (t+1)^{-a}e^{bx},\ a > 1,\ b > 0$, với mọi $(t,x) \in \Omega^3_\infty$, thì ta có

$$^{RL}I^q\Phi(t,x) = \frac{1}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}\int_0^t (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-a}ds\int_0^x (x-z)^{q_2-1}e^{bz}dz.$$

Từ chứng minh Bổ đề 3.1, ta suy ra với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\int_0^x (x-z)^{q_2-1}e^{bz}dz \le \frac{e^{bx}}{q_2}\Big[2\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_2}{2}} + \frac{1}{b}\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_2}\Big].$$

Hơn nữa, theo (4.17), ta có đánh giá

$$\int_0^t (t-s)^{q_1-1}(s+1)^{-a}ds < \frac{1}{1-q_1} + \frac{1}{q_1}.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}&^{RL}I^q\Phi(t,x)\\ &\le \frac{1}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)(1-q_1)}\Big[2\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_2}{2}} + \frac{1}{b}\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_2}\Big](t+1)^a\Phi(t,x).\end{aligned}$$

Như vậy, tồn tại

$$m_\Phi = \frac{1}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)(1-q_1)}\Big[2\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{\frac{q_2}{2}} + \frac{1}{b}\Big(\frac{C}{b^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\Big)^{q_2}\Big] > 0$$

và $\nu = a$ sao cho $^{RL}I^q\Phi(t,x) \le m_\Phi e^{\nu t}\Phi(t,x)$. Điều này chứng tỏ Φ thỏa mãn điều kiện (4.13). Theo Định lý 4.2, bài toán (4.18) -(4.19) là ổn định Hyers-Ulam-Rassias kiểu 1 theo $\Phi(t,x) = (t+1)^{-a}e^{bx},\ a > 1, b > 0, (t,x) \in \Omega^3_\infty$.

Ví dụ 4.2. Xét phương trình đạo hàm riêng hyperbolic mờ bậc phân số

$$^{C}_{gH}\mathcal{D}^q u(t,x) = (t+1)^{-2}(e^x + x^3 + 3)u(t,x),\ (t,x) \in \Omega^2_\infty = [0,+\infty)\times[0,2] \tag{4.20}$$

với điều kiện biên địa phương

$$u(t,0) = (2t+1)C,\ t \in [0,+\infty),\ u(0,x) = (x^2+2x+2)C,\ x \in [0,2]. \tag{4.21}$$

trong đó $q = (q_1,q_2) \in [0,1)\times[0,1)$, C là một số mờ.

Đặt $f(t,x,u(t,x)) = (t+1)^{-2}(e^x + x^3 + 3)u(t,x),\ \forall (t,x) \in \Omega^2_\infty$. Dễ thấy, với $u \in C(\Omega^2_\infty, E)$, $f(t,x,u(t,x))$ là một hàm liên tục và bài toán (4.20)-(4.21) thỏa mãn điều kiện $(\mathbf{G_3'})$ với $\beta = 2, L = e^2 + 11$.

Hơn nữa, vì $\eta_1(t) = (2t+1)C,\ \eta_2(x) = (x^2+2x+2)C$, với mọi $(t,x) \in \Omega^2_\infty$ nên ta có điều kiện $(\mathbf{G_5})$ thỏa mãn với $M_5 = d_\infty(C,\hat{0}), c_5 = 2$ và $M_6 = 10d_\infty(C,\hat{0})$.

Do đó, theo Định lý 4.3, điểm cân bằng $\hat{0}$ của bài toán (4.20)-(4.21) là ổn định.

Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hai kiểu ổn định của bài toán biên địa phương đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số dưới tính khả vi gH-Caputo:

1) Tính ổn định Ulam (Định lý 4.1 và Định lý 4.2).

2) Tính ổn định Lyapunov (Định lý 4.3).

Mặc dù, các kết quả về tính hút, tính ổn định tiệm cận theo nghĩa Lyapunov của các bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng trong giải tích cổ điển là khá phong phú, các kết quả này khi được xét trên không gian các số mờ còn rất hạn chế và là bài toán mở cần được nghiên cứu.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán biên đối với phương trình hyperbolic mờ có trễ và bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số. Luận án đạt được các kết quả sau:

1) Định nghĩa được hai loại nghiệm tích phân tương ứng với hai kiểu đạo hàm Hukuhara suy rộng của hàm hai biến giá trị số mờ của bài toán biên địa phương cho phương trình hyperbolic mờ có trễ. Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của từng loại nghiệm tích phân mờ của bài toán biên địa phương cho phương trình hyperbolic mờ có trễ trong miền bị chặn và miền vô hạn.

2) Xây dựng khái niệm tích phân Riemann - Liouville cho hàm hai biến giá trị mờ và chứng minh tính đúng đắn của định nghĩa thông qua việc sử dụng Định lý Stacking. Từ đó đưa ra khái niệm về đạo hàm gH-Caputo cùng nhiều ví dụ minh họa.

3) Đặt bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số dưới tính khả vi gH-Caputo. Định nghĩa hai loại nghiệm tích phân tương ứng với hai kiểu đạo hàm gH-Caputo của bài toán. Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trong trường hợp vế phải Lipschitz. Khi vế phải không Lipschitz, sử dụng một phiên bản của Định lý Schauder trong không gian metric nửa

tuyến tính, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán trên miền bị chặn.

4) Với các điều kiện bổ sung của vế phải và điều kiện biên, chúng tôi chứng minh được một số tính chất định tính của nghiệm của bài toán biên địa phương cho phương trình đạo hàm riêng mờ dạng hyperbolic bậc phân số trong miền vô hạn:

   - Tính ổn định Ulam.
   - Tính ổn định Lyapunov.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng mờ bậc phân số có trễ.
- Nghiên cứu bài toán biên không địa phương của phương trình đạo hàm riêng mờ bậc phân số.
- Nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng mờ ngẫu nhiên.
- Nghiên cứu phương trình tiến hóa mờ bằng phương pháp nửa nhóm.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

1) H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam, B.C. Cuong (2014), On the existence of fuzzy solutions for partial hyperbolic functional differential equations, Int. J. Comput. Intell. Syst., 7, No.6, 1159-1173. (SCIE)

2) H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam (2015), Global existence of solutions to fuzzy partial hyperbolic functional differential equations with generalized Hukuhara derivatives, J. Intell. Fuzzy Syst., 29, No.2, 939 - 954. (SCIE)

3) H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam (2017), The solvability of fuzzy fractional partial differential equations under Caputo gH-differentiability, Fuzzy Sets Syst., 309, 35-63. (SCI)

4) H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam, J.-C. Yao (2017), Ulam stability for fractional partial integro-differential equation with uncertainty, Acta Math Vietnam 42, No.4, 685 - 700. (Scopus)

5) N.T.K. Son, H.T.T. Tam, On the stability and global attractivity of solutions of fuzzy fractional partial differential equations, accepted.

Tài liệu tham khảo

[1] S. Abbas, M. Benchohra, G.M. N'Guérékata (2012), *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York.

[2] S. Abbas, M. Benchohra, A. Petrusel (2014), Ulam stability for partial fractional differential inclusions via Picard operators theory, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 51, 1 - 13.

[3] R.P Agarwal, S. Arshad, D. O'Regan, V. Lupulescu (2013), A Schauder fixed point theorem in semilinear spaces and applications, *Fixed Point Theory Appl.*, 306, 1-13.

[4] R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto (2010), On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Anal.*, 72, No.6, 2859-2862.

[5] A. Ahmadian, S. Salahshour, D. Baleanu, H. Amirkhani, R. Yunus (2015), Tau method for numerical solution of a fractional kinetic model and its application to the Oil Palm Frond as a promising source of xylose, *J. Comput. Phys.*, 294, 562- 584.

[6] T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand (2014), Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 26, No. 3, 1481-1490.

[7] T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu (2015), On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability, *Fuzzy Sets Syst.*, 265, 1-23.

[8] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy and H. Rouhparvar (2011), The exact solutions of fuzzy wave-like equations with variable coefficients by a variational iteration method, *Applied Soft Computing*, 11, No.2, 2186-2192.

[9] S. Arshad, V. Lupulescu (2011), On the fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Anal.*, 74, No.11, 3685 - 3693.

[10] S. Arshad (2013), On existence and uniqueness of solution of fuzzy fractional differential equations, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 10, No.6, 137-151.

[11] L.C. Barros, R.C. Bassanezi, W.A. Lodwick (2016), *A First Course In Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, And Biomathematics: Theory And Applications*, Springer Berlin Heidelberg.

[12] B. Bede (2013), *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[13] B. Bede, S.G. Gal (2005), Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 151, 581-599.

[14] B. Bede, L. Stefanini (2013), Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, *Fuzzy Sets Syst.*, 230, 119-141.

[15] A.M. Bertone, R. M. Jafelice, L.C. Barros and R.C. Bassanezi (2013), On fuzzy solutions for partial differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 219, 68-80.

[16] J. Buckley and T. Feuring (1999), Introduce to fuzzy partial differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 105, 241-248.

[17] M.S. Cecconello, J. Leite, R.C. Bassanezi (2017), Asymptotic analysis of continuous fuzzy flows, *Comp. Appl. Math.*, 36, No.4, 1681 -1697.

[18] M.S. Cecconello, J. Leite, R.C. Bassanezi, A.J. Brandão (2015), Invariant and attractor sets for fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets Syst.*, 265, 99-109.

[19] M.S. Cecconello, R.C. Bassanezi, A.J. Brandão, J. Leite (2014), On the stability of fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets Syst.*, 248, 106-121.

[20] P. Diamond, P. Kloeden (1994), *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore.

[21] P. Diamond (2000), Stability and periodicity in fuzzy differential equations, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8, No.5, 583-590.

[22] P. Diamond, P. Kloeden (2000), *Metric Topology of Fuzzy Numbers and Fuzzy Analysis*. In: Dubois D., Prade H. (eds) Fundamentals of Fuzzy Sets. The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol 7. Springer, Boston, MA.

[23] Z. Ding, A. Kandel (1997), Existence and stability of fuzzy differential equations, *J. Fuzzy Math.*, 5, 681-697.

[24] R. Goetschel, W. Voxman (1986), Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets Syst.*, 18, 31 - 43.

[25] L. T. Gomes, L. C. Barros, B. Bede (2015), *Fuzzy Differential Equations in Various Approaches*, Springer, Cham.

[26] J. K. Hale (1977), *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, NewYork.

[27] N.V. Hoa (2015) , Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 22, No.1-3, 1134-1157.

[28] M. Hukuhara (1967), Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe, *Funkcialaj Ekvacioj*, 10, 205-223.

[29] R. M. Jafelice, C. Almeida, J.F.C.A. Meyer, H.L. Vasconcelo (2011), Fuzzy parameters in a partial differential equation model for population dispersal of leaf-cutting ants, *Nonlinear Anal.*, 12, No.6, 3397-3412.

[30] O. Kaleva (1987), Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 24, 301-317.

[31] A. Khastan, J.J. Neito, R. Rodríguez-López (2014), Fuzzy delay differential equations under generalized differentiability, *Inf. Sci.*, 275, 145 - 167.

[32] A. Khastan, J.J. Nieto, R. Rodríguez-López (2014), Schauder fixed-point theorem in semilinear spaces and its application to fractional differential equations with uncertainty, *Fixed Point Theory Appl.*, 2014: 21, 1687-1812.

[33] S. Kikuchi and J. Patamesvratan (1993), Use of fuzzy control for designing transportation schedule, *Proc. NAFIPS Meeting, Allentown, PA*, 169-173.

[34] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science, Amsterdam.

[35] G. J. Klir and B. Yuan (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA.

[36] Y. Kuang (1993), *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston.

[37] V. Lakshmikantham and R. Mohapatra (2003), *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions*, Taylor and Francis Publishers, London.

[38] H.V. Long, N.T.K. Son, N.T.M. Ha, L.H. Son (2014), The existence and uniqueness of fuzzy solutions for hyperbolic partial differential equations, *Fuzzy Optim. Decis. Making*, 13, No.4, 435-462.

[39] V. Lupulescu (2009), On a class of fuzzy functional differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 160, 1547 - 1562.

[40] V. Lupulescu and U. Abbas (2012), Fuzzy delay differential equations, *Fuzzy Optim. Decis. Mak.*, 11, No.1, 99-111.

[41] M.T. Malinowski (2015) , Random fuzzy fractional integral equations - Theoretical foundations, *Fuzzy Sets Syst.*, 265, 39-62.

[42] M. Mazandarani, A.V. Kamyad (2013), Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 18, No.1, 12-21.

[43] M.T. Mizukoshi, L.C. Barros, R.C. Bassanezi (2009), Stability of fuzzy dynamic systems, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Syst.*, 17, No.1, 69-83.

[44] C. Negoita, D. Ralescu (1975), *Application of Fuzzy Sets to System Analysis*, Wiley, New York.

[45] H. T. Nguyen (1978), A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 64, No.2, 369 - 380.

[46] J.J. Nieto (1999), The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, 102, 259-262.

[47] M. Nikravesh, L.A. Zadeh and V. Korotkikh (2004), *Fuzzy Partial Differential Equations and Relational Equations*, Springer - Verlag, Berlin, Germany.

[48] M. Obloza (1993), Hyers stability of the linear differential equation, *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 13, 259-270.

[49] B. G. Pachpatte (1998), *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press, Inc., San Diego, CA.

[50] L.M. Puri and D. Ralescu (1983), Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 92, No.2, 552 - 558.

[51] H. Román-Flores, M. Roas-Medar (2002), Embedding of level-continuous fuzzy sets on Banach spaces, *Inf. Sci.*, 144, No.1-4, 227-247.

[52] S. Salahshour, A. Ahmadian, N. Senu, D. Baleanu, P. Agarwal (2015), On analytical solutions of the fractional differential equation with uncertainty, Application to the Basset Problem, *Entropy*, 17, No.2, 885-902.

[53] S. Seikkala (1987), On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets Syst.*, 24, 319-330.

[54] Y. Shen (2015), On the Ulam stability of first order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, *Fuzzy Sets Syst.*, 280, 27-57.

[55] Y. Shen, F. Wang (2016), A fixed point approach to the Ulam stability of fuzzy differential equations under generalized differentiability, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 30, No.6, 3253-3260.

[56] L. Stefanini (2010), A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets Syst.*, 161, 1564-1584.

[57] L. Stefanini, B. Bede (2009), Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, *Nonlinear Anal.*, 71, No.3-4, 1311-1328.

[58] A. Zada, O. Shah, R. Shah (2015), Hyers-Ulam stability of nonautonomous systems in terms of boundedness of Cauchy problems, *Appl. Math. Comput.*, 271, 512-518.

[59] L.A. Zadeh (1965), Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, No.3, 338-353.

[60] L.A. Zadeh (1975), The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Inf. Sci.*, 8, No.3, 199-249.