BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

HOÀNG VIỆT

TÍNH CỰC ĐẠI, TÍNH CỰC ĐẠI ĐỊA PHƯƠNG VÀ VẤN ĐỀ XẤP XỈ CỦA CÁC HÀM $\mathcal{F}$-ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

-----❦📖❦-----

HOÀNG VIỆT

TÍNH CỰC ĐẠI, TÍNH CỰC ĐẠI ĐỊA PHƯƠNG VÀ VẤN ĐỀ XẤP XỈ CỦA CÁC HÀM $\mathcal{F}$-ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9.46.01.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. Nguyễn Văn Trào
GS. TSKH. Đỗ Đức Thái

Hà Nội - Năm 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận án này do chính tác giả thực hiện tại Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Trào và GS. TSKH. Đỗ Đức Thái; kết quả của Luận án là mới, đề tài của Luận án không trùng lặp và chưa được công bố trong bất cứ công trình của ai khác.

Tác giả

Hoàng Việt

Lời cảm ơn

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Trào và GS. TSKH. Đỗ Đức Thái. Bằng tất cả sự kính trọng của mình, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới các Thầy đã nhiệt tình hướng dẫn tôi trên con đường nghiên cứu khoa học. Tôi cảm thấy rất may mắn, vinh dự và hạnh phúc khi được các Thầy dìu dắt, hướng dẫn.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Xuân Hồng, Thầy đã hướng dẫn, góp ý rất tỉ mỉ trong quá trình tôi học tập, nghiên cứu và soạn thảo luận án này tại Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Nguyễn Văn Khuê, GS. TSKH. Lê Mậu Hải, GS. TS. Nguyễn Quang Diệu, GS. TSKH. Phạm Hoàng Hiệp, PGS. TS. Phùng Văn Mạnh - những người Thầy đã giảng dạy, giúp đỡ tôi nghiên cứu khoa học.

Tôi vô cùng cảm ơn các thầy cô, các bạn đồng nghiệp của nhóm Seminar Lí thuyết hàm, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đó là một tập thể khoa học làm việc nghiêm túc, đã chỉ dẫn, góp ý trực tiếp, giúp tôi trang bị cho mình về phương pháp nghiên cứu và những hiểu biết sâu sắc hơn về nhiều vấn đề toán học. Nhân dịp này, tôi xin chân thành cảm ơn TS. Tăng Văn Long, TS. Nguyễn Văn Khiêm, TS. Phạm Nguyễn Thu Trang, ... đã có những góp ý rất có ý nghĩa cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Tôi xin cảm ơn đến Tổ bộ môn Lí thuyết hàm, Khoa Toán-Tin, Phòng sau đại học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và các đơn vị chức năng đã tạo các điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng tri ân đối với những người thầy, những đồng nghiệp, gia đình và bạn bè thân thích đã giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu.

Hà Nội, năm 2018

NCS. Hoàng Việt

Mục lục

KÍ HIỆU

- $\mathbb{N}^*$: Tập các sô tự nhiên khác 0.
- $\mathbb{C}^n$: Không gian vectơ phức n chiều.
- $\mathbb{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - z_0\| < r\}$: Hình cầu mở tâm z_0 bán kính $r > 0$.
- $QB(\mathbb{C}^n)$: σ-đại số trên $\mathbb{C}^n$ được sinh bởi các tập Borel và các tập con đa cực của $\mathbb{C}^n$.
- $\overline{G}^{\mathcal{F}}$: Bao đóng của G trong $\mathcal{F}$-tôpô.
- $\partial_{\mathcal{F}} G$: Biên của G trong $\mathcal{F}$-tôpô.
- $\chi \circ u$: Hợp thành (tích) của các hàm u và χ.
- $\mathcal{SH}(\Omega)$: Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω.
- $\mathcal{SH}^-(\Omega)$: Tập các hàm điều hòa dưới âm trên Ω.
- $\mathcal{PSH}(\Omega)$: Tập các hàm đa điều hòa dưới trên Ω.
- $\mathcal{PSH}^-(\Omega)$: Tập các hàm đa điều hòa dưới âm trên Ω.
- $\mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$: Tập các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω.
- $\mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}^-(\Omega)$: Tập các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm trên Ω.
- $\mathcal{F}$-$\mathcal{MPSH}(\Omega$: Tập các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω.
- $L^\infty(\Omega)$: Không gian các hàm bị chặn trên Ω.
- $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$: Không gian các hàm bị chặn địa phương trên Ω.

- $(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u$: Độ đo Monge-Ampère của u.
- $\mathcal{C}(\Omega)$: Tập các hàm liên tục trên Ω.
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: Tập các hàm khả vi vô hạn trên Ω.
- $u_j \nearrow u$: dãy $\{u_j\}$ hội tụ tăng tới u.
- $u_j \searrow u$: dãy $\{u_j\}$ hội tụ giảm tới u.
- 1_A : Hàm đặc trưng của tập A.
- h.k.n. : hầu khắp nơi.

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Nội dung của toàn bộ luận án này nghiên cứu một lớp đặc biệt các hàm đa điều hòa dưới. Đó là các hàm đa điều hòa dưới plurifine mà ta sẽ viết là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Lịch sử của vấn đề đưa ra nghiên cứu xuất phát từ các kết quả của H. Cartan vào đầu những năm 40 của thế kỉ trước. Khi đó, để khắc phục tính không liên tục của các hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$, Cartan đã đưa ra tôpô "fine" trên $\mathbb{C}$ như là tôpô yếu nhất trên $\mathbb{C}$ mà làm cho mọi hàm điều hòa dưới là liên tục. Ông đã thiết lập được một số kết quả đáng chú ý đối với lớp hàm nói trên ([14]). Sau đó vào những năm 70 (của thế kỉ trước), Fuglede đã đưa ra các hàm điều hòa fine và hàm chỉnh hình fine và thiết lập mối liên hệ giữa chúng như mối liên hệ giữa hàm điều hòa và hàm chỉnh hình trong các giáo trình giải tích phức. Tổng quát các khái niệm trên lên $\mathbb{C}^n$, Wiegerinck và các cộng sự đã xây dựng tôpô plurifine (ta sẽ kí hiệu là $\mathcal{F}$-tôpô) trên $\mathbb{C}^n$ và xác định khái niệm hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Họ đã phát triển thành Lí thuyết đa thế vị plurifine mà ta viết là $\mathcal{F}$-đa thế vị ([47]).

Một vấn đề tự nhiên được đặt ra trong Lí thuyết $\mathcal{F}$-đa thế vị là nghiên cứu những vấn đề tương tự của Lí thuyết đa thế vị thông thường cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Như ta đã biết, trong số các hàm đa điều hòa dưới trên tập mở Euclidean Ω trong $\mathbb{C}^n$, tồn tại một lớp con giữ vai trò rất quan trọng, có nhiều ứng dụng trong Lí thuyết đa thế vị, đặc biệt trong giải bài toán Dirichlet tổng quát, đó là lớp các hàm đa điều hòa dưới cực đại. Vì thế, nghiên cứu tính cực đại của hàm đa điều hòa dưới trên tập con mở Euclidean trong $\mathbb{C}^n$ là một trong những vấn đề cơ bản của Lí thuyết đa thế vị. Do tính cực đại địa phương của hàm đa điều hòa dưới dễ nhận thấy hơn trong nhiều trường hợp nên một ý tưởng tự nhiên là chuyển việc xét tính cực đại (toàn cục) của hàm đa điều hòa dưới về việc xét tính cực đại địa phương của hàm đó. Tuy nhiên, cho đến nay, việc giải quyết triệt để giữa tính tương đương của tính cực đại địa phương của một hàm đa điều hòa dưới tùy ý u trên tập mở Ω và tính cực đại của u trên Ω vẫn là bài toán mở.

Một vấn đề khác cũng được nhiều tác giả nghiên cứu trong thời gian gần đây là xấp xỉ hàm đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới xác định trên một miền rộng hơn. Benelkourchi, Cegrell, Hed, Alevin, Persson, ... đã thu được những kết quả sâu sắc về vấn đề trên trong khoảng 10 năm trở lại đây.

Theo hướng tiếp cận trên, Luận án của chúng tôi tập trung nghiên cứu lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

2. Mục đích nghiên cứu của Luận án

Trước hết, Luận án tập trung nghiên cứu một số tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Cụ thể, nghiên cứu mối quan hệ giữa tính chất địa phương và toàn cục của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới thông qua việc chỉ ra điều kiện cần và đủ để các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trong một số tình huống nhất định. Sau đó nghiên cứu vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới thông thường.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Hàm đa điều hòa dưới, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại.
- Toán tử Monge-Ampère phức cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn.
- Một số lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên $\Omega : \mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega)$.
- Vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong nghiên cứu toán học cơ bản với công cụ và kĩ thuật truyền thống của Lí thuyết đa thế vị, Lí thuyết $\mathcal{F}$-đa thế vị, Giải tích hàm, Giải tích phức.
- Tham gia seminar nhóm, seminar tổ bộ môn để thường xuyên trao đổi, thảo luận, công bố các kết quả nghiên cứu, nhằm thu nhận các thông tin về tính chính xác khoa học của các kết quả nghiên cứu trong cộng đồng các nhà khoa học chuyên ngành trong và ngoài nước.

5. Những đóng góp của Luận án

Luận án đã đạt được mục đích nghiên cứu đề ra và có những đóng góp nhất định, cụ thể:

- Luận án đã chỉ ra sự tương đương giữa tính chất $\mathcal{F}$-cực đại toàn cục với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên các tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ (Định lí 2.1.2).

- Mở rộng kết quả trên và bằng kĩ thuật chứng minh mới, Luận án đã chỉ ra sự tương đương giữa tính chất $\mathcal{F}$-cực đại toàn cục với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *bị chặn* trên các tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ (Định lí 2.2.2).

  Kết quả này có ý nghĩa khoa học vì nó đúng cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các tập $\mathcal{F}$-mở.

- Luận án đã đưa ra khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi và đưa ra lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$. Với những khái niệm thích hợp như vậy, Luận án đã chứng minh tính chất xấp xỉ được của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn (Định lí 3.3.1).

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

- Các kết quả được nêu ra trong Luận án là mới, có tính thời sự, có ý nghĩa khoa học và đã đóng góp vào việc nghiên cứu tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

- Về mặt phương pháp, Luận án đã góp phần làm phong phú thêm các công cụ và kĩ thuật nghiên cứu Giải tích phức và Lí thuyết đa thế vị.

7. Cấu trúc của Luận án

Cấu trúc của Luận án được trình bày theo đúng qui định cụ thể đối với luận án tiến sĩ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Cấu trúc Luận án bao gồm các phần: Mở đầu, Tổng quan về các vấn đề trong Luận án (Tổng quan), các Chương, Kết luận, Danh mục công trình trong Luận án, Tài liệu tham khảo.

Nội dung chính của Luận án gồm ba chương có tên và nội dung tóm tắt như sau:

- **Chương 1. Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và toán tử Monge-Ampère phức**

  Chương 1 trình bày một số kiến thức cần thiết về $\mathcal{F}$-tôpô, định nghĩa và một số tính chất của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère phức và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại, cũng như một số kết quả ([39], [40], [46]) sẽ sử dụng trong các chương sau.

- **Chương 2. Tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại**

  Chương 2 trình bày các nội dung và kết quả nghiên cứu nhằm giải quyết Vấn đề thứ nhất ([40], [39]) đã được nêu ra trong phần Tổng quan. Cụ thể, trong điều kiện *liên tục* hoặc *bị chặn* của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$, đã thiết lập điều kiện cần và đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương là $\mathcal{F}$-cực đại toàn thể. Các kết quả chính thu được là Định lí 2.1.2 và Định lí 2.2.2.

- **Chương 3. Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới**

Chương 3 trình bày các nội dung và kết quả nghiên cứu nhằm giải quyết Vấn đề thứ hai ([46]) đã được nêu ra trong phần Tổng quan. Cụ thể, đã chỉ ra khi nào thì hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm u trong $\mathcal{F}$-miền Ω, có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω. Kết quả chính của chương là Định lí 3.3.1.

Trong phần Kết luận, chúng tôi điểm lại các kết quả nghiên cứu chính đã trình bày trong Luận án và khẳng định ý tưởng khoa học của đề tài Luận án đặt ra là đúng, cũng như các kết quả nghiên cứu đã đạt được mục đích đề ra. Do đó, Luận án đã có những đóng góp cho khoa học chuyên ngành, có ý nghĩa khoa học và thực tiễn như đã nêu.

Trong phần Kiến nghị, chúng tôi đưa ra một vài ý tưởng nghiên cứu tiếp theo để phát triển đề tài của Luận án. Chúng tôi hi vọng, sẽ nhận được nhiều sự quan tâm và chia sẻ của các nhà khoa học và đồng nghiệp, giúp hoàn thiện các kết quả nghiên cứu.

Tổng quan về các vấn đề trong Luận án

Như đã trình bày ở trên, hàm đa điều hòa dưới là một trong các đối tượng trung tâm của Lí thuyết đa thế vị. Việc nghiên cứu các hàm đa điều hoà dưới mà trọng tâm của nó là nghiên cứu các toán tử Monge-Ampère phức đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học lớn từ thập niên 30 của thế kỉ XX và đã thu được những kết quả sâu sắc. Những công trình của các tác giả K. Oka, H. Cartan, P. Lelong, E. Bedford, B.A. Taylor, U. Cegrell, S. Kolodziej, ... không chỉ ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển của Giải tích phức nhiều biến nói riêng mà còn thúc đẩy sự phát triển của nhiều lĩnh vực khác trong Toán học hiện đại.

Theo tôpô Euclidean thông thường, các hàm đa điều hoà dưới nói chung là không liên tục, trong khi tính liên tục lại giữ vai trò then chốt trong nghiên cứu Lí thuyết hàm. Vì thế, việc đưa ra những tôpô mới nhằm mô tả tốt hơn tính liên tục của các hàm đa điều hoà dưới đã được quan tâm từ thập niên 30 của thế kỉ trước.

Năm 1939 M. Brelot giới thiệu khái niệm điểm mỏng của một tập hợp. Ông đã đưa ra định nghĩa: Tập E là mỏng tại a nếu hoặc a không là điểm giới hạn của một dãy các điểm của E hoặc tồn tại một hàm điều hoà dưới trong một lân cận của a sao cho

$$\lim_{z\to a, z\in E\setminus\{a\}} \sup \varphi(z) < \varphi(a).$$

Sau đó H. Cartan đã nhận xét trong một lá thư gửi cho Brelot rằng điều này tương đương với $E\setminus\{a\}$ là lân cận của a trong tôpô yếu nhất làm cho tất cả các hàm điều hoà dưới liên tục. Từ đó H. Cartan đã xây dựng $\mathcal{F}$-tôpô trên $\mathbb{C}$. Mở rộng khái niệm trên cho $\mathbb{C}^n$, ta hiểu $\mathcal{F}$-tôpô trên một tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tôpô yếu nhất làm cho các hàm đa điều hòa dưới liên tục.

$\mathcal{F}$-tôpô đã được nghiên cứu tiếp theo hơn Bedford và Taylor trong [8]. Ở đây hai ông đã nghiên cứu sự hội tụ của dãy các dòng trong mối liên hệ với $\mathcal{F}$-tôpô của các hàm đa điều hòa dưới. Những năm gần đây, $\mathcal{F}$-tôpô đã được nghiên cứu sâu sắc bởi Marzguioui và Wirgenrinck trong [24], [25].

Các khái niệm gắn liền với $\mathcal{F}$-tôpô, được chỉ ra với tiếp đầu ngữ $\mathcal{F}$. Chẳng hạn, $\mathcal{F}$-mở là mở trong $\mathcal{F}$-tôpô; $\mathcal{F}$-bao đóng là bao đóng trong $\mathcal{F}$-tôpô; $\mathcal{F}$-biên là biên trong $\mathcal{F}$-tôpô; ...

Bằng cách sử dụng $\mathcal{F}$-tôpô, ta có thể định nghĩa một cách tự nhiên các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và các hàm $\mathcal{F}$-chỉnh hình. Các kết quả trong [19], [20], [25], [26] đã chỉ ra rằng, tồn tại hai cách hợp lí để mở rộng các khái niệm hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và các hàm $\mathcal{F}$-chỉnh hình: Khái niệm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới yếu được định nghĩa bằng cách đòi hỏi hạn chế của các hàm trên các đường thẳng phức là $\mathcal{F}$-điều hòa dưới (tương ứng $\mathcal{F}$-chỉnh hình) và khái niệm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới mạnh được thiết lập nhờ sự xấp xỉ các hàm bởi các hàm đa điều hòa dưới (tương ứng các hàm chỉnh hình thông thường) trên các lân cận thích hợp trong $\mathcal{F}$-tôpô.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Các tính chất nào của các hàm đa điều hòa dưới thông thường có thể chuyển tới các khái niệm mới (tương ứng với khái niệm yếu và mạnh) đối với các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới?

Đã có những nghiên cứu đi theo hướng tiếp cận trên, chẳng hạn, năm 2003, El Kadiri [19] đã định nghĩa khái niệm hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập con $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ và đã nghiên cứu các tính chất của các hàm đó. Các hàm này đã được định nghĩa như là các hàm $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên mà hạn chế trên đường thẳng phức là hàm $\mathcal{F}$-điều hòa dưới, ở đó một hàm $\mathcal{F}$-điều hòa dưới xác định trên một $\mathcal{F}$-miền được định nghĩa là hàm nửa liên tục trên và thỏa mãn bất đẳng thức giá trị trung bình. Định nghĩa này là mở rộng tự nhiên hàm đa điều hòa dưới cho hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Năm 2010, El Marzguioui và Wiegerinck đã nghiên cứu tính chất liên tục của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên tập $\mathcal{F}$-mở. Họ đã chứng minh rằng, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới là $\mathcal{F}$-liên tục ([26], Định lí 3.1).

Năm 2011, El Kadiri, Fuglede và Wiegerinck [20] đã chứng minh nhiều tính chất quan trọng của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Năm 2014, El Kadiri và Wiegerinck [22] đã định nghĩa toán tử Monge–Ampère trên các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn trong các tập $\mathcal{F}$-mở và đã chỉ ra rằng nó được xác định là độ đo dương. El Kadiri và Smit [21] đã giới thiệu và nghiên cứu khái niệm của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại và các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương. Đó là mở rộng khái niệm của các hàm đa điều dưới cực đại trên một miền Euclidean tới một $\mathcal{F}$-miền của $\mathbb{C}^n$ một cách tự nhiên. Họ đã chứng minh rằng mỗi hàm đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại, $\mathcal{F}$-địa phương, bị chặn xác định trên một tập mở Euclidean là $\mathcal{F}$-cực đại và họ đã đưa ra ví dụ, chỉ ra rằng kết quả này là không khả thi khi hàm không hữu hạn.

Hướng nghiên cứu đầu tiên của Luận án là mở rộng kết quả của các tác giả trên đối với các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu điều kiện đủ để nhận được tính $\mathcal{F}$-cực đại của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trong các tập $\mathcal{F}$-mở từ tính chất địa phương tương ứng.

Tiếp đến chúng tôi xét bài toán xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Lịch sử của vấn đề này là như sau:

Kết quả đầu tiên thuộc về Fornæss và Wiegerinck [27] nói rằng nếu Ω là miền bị chặn với C^1-biên và u là liên tục trên $\overline{\Omega}$ thì u có thể được xấp xỉ đều trên $\overline{\Omega}$ bởi một dãy của các hàm đa điều hòa dưới trơn được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω. Gần đây Avelin, Hed and Persson [5] đã mở rộng kết quả này tới miền với biên địa phương được cho bởi đồ thị của các hàm liên tục. Ngoài ra, theo kết quả của [9], [10], [17], [34] và N.X.Hồng, hàm đa điều hòa dưới u có thể được xấp xỉ đơn điệu từ bên ngoài bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới, nếu miền Ω có tính chất $\mathcal{F}$-xấp xỉ và u thuộc về một trong những lớp Cegrell trong Ω.

Những kết quả nói trên dẫn đến vấn đề sau: Giả sử u là một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm trong $\mathcal{F}$-miền Ω. Khi nào thì u có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω?

Do đó trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu và giải quyết hai vấn đề sau đây.

Vấn đề thứ nhất: Nghiên cứu tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Klimek [43] đã chứng minh rằng, một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương u xác định trên một tập mở Euclidean là cực đại nếu và chỉ nếu $(dd^c u)^n = 0$, và vì thế, hàm đa điều hòa dưới bị chặn, xác định trên một tập mở Euclidean là cực đại nếu và chỉ nếu nó là cực đại địa phương. Như thế tính cực đại và tính cực đại địa phương đối với hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương xác định trên một tập mở Euclidean là tương đương.

Mặc dù đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn u được xác định trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω thì toán tử Monge–Ampère phức $(dd^c u)^n$ có thể định nghĩa một cách $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω nhưng những kĩ thuật quen thuộc của Klimek [43] và các tác giả khác không áp dụng được cho tình huống u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω. Chính vì thế, cần phải tìm những kĩ thuật khác để tổng quát kết quả của Klimek [43] cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Như đã trình bày ở trên, chúng tôi đưa ra những điều kiện để tính chất $\mathcal{F}$-cực đại của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$ nhận được từ tính chất $\mathcal{F}$-cực đại địa phương trên Ω. Cụ thể: Định lí 2.1.2 chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên Ω thì hàm đó là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng kết quả trên, thay thế điều kiện *liên* *tục* trong Định lí 2.1.2 bởi điều kiện yếu hơn là *bị chặn* của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$. Kết quả nhận được là Định lí 2.2.2, chỉ ra rằng tính chất $\mathcal{F}$-cực đại là tương đương với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương.

Vấn đề thứ hai: Nghiên cứu việc xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi các hàm đa điều hòa dưới

Chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới u trên một tập con mở Euclidean Ω được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Ở đây, việc xấp xỉ hàm u được hiểu theo nghĩa, u có thể được xấp xỉ đều trên $\overline{\Omega}$ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trơn xác định trên lân cận Euclidean của Ω.

Bằng cách đưa ra các khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, chúng tôi đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên lân cận của Ω.

Các kết quả của Luận án đã được báo cáo tại hội nghị, hội thảo sau:

[1] Hội nghị (01/2017), "Xấp xỉ của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới", Báo cáo Hội nghị khoa học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Hội nghị (12/2017), "Cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn", Báo cáo Hội nghị khoa học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[3] Hội nghị Khoa học (8/2018), "Tính chất địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại", Báo cáo Tiểu ban Giải tích - Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX - Nha Trang.

Chương 1

Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và toán tử Monge-Ampère phức

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản về $\mathcal{F}$-tôpô trong $\mathbb{C}^n$, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và đưa ra một số kết quả nghiên cứu đã được sử dụng trong Luận án.

1.1 $\mathcal{F}$-tôpô và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Sau đây, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản về $\mathcal{F}$-tôpô đã được nêu trong [8], [24], [25], [23], [47].

Định nghĩa 1.1.1. *$\mathcal{F}$-tôpô* trên tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tôpô yếu nhất trên Ω làm cho mọi hàm đa điều hòa dưới trên Ω là liên tục.

Từ các hàm đa điều hòa dưới luôn là nửa liên tục trên, một cơ sở con địa phương tại bất kì $a \in \Omega$ được cho bởi các tập

$$U(a, \mathbb{B}, \varphi) = \{z \in \mathbb{B} : \varphi(z) > 0\}$$

ở đó $\mathbb{B} \subset \Omega$ là một hình cầu tâm a và $\varphi \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B})$ với $\varphi(a) > 0$.

Mệnh đề sau đây mô tả lân cận của điểm a.

Mệnh đề 1.1.2. *Giả sử $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$ trên một tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó, các tập $U(a, \mathbb{B}, \varphi)$ tạo thành một cơ sở địa phương đối với $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$.*

Định lí sau đây trong [47] về tính chất của $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$.

Định lí 1.1.3. *Giả sử $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$ trên một tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.*

i) $\mathcal{F}$ là tựa-Lindelöf, nghĩa là, mỗi hợp tùy ý của các tập $\mathcal{F}$-mở là hợp của một hợp các tập con đếm được và một tập đa cực.

ii) $\mathcal{F}$ là chính qui đầy, nghĩa là, với mỗi tập $\mathcal{F}$-đóng $A \subset \Omega$ và $a \in \Omega \backslash A$, tồn tại một hàm $\mathcal{F}$-liên tục f sao cho $f|_A = 0$ và $f(a) \neq 0$.

Nhận xét 1.1.4. (i) Nếu $u \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n), c \in \mathbb{R}$ thì từ định nghĩa trên, các tập $\{u < c\}, \{u > c\}$ là các tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$.

(ii) Với mọi $a \in \mathbb{C}^n$, hàm $z \mapsto \|z - a\| \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$ nên

$$\mathbb{B}(a, r) = \{z \in (\mathbb{C}^n) : \|z - a\| < r\} \text{ là } \mathcal{F}\text{-mở.}$$

Vậy mọi tập mở trong $\mathbb{C}^n$ đối với tôpô sinh bởi mêtric Euclidean: $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}$ với $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ là $\mathcal{F}$-mở. Thật vậy, lấy G là một tập mở đối với tôpô Euclidean. Với mọi $x \in G$, tồn tại $r > 0$ sao cho

$\mathbb{B}(x,r) \subset G$. Do $\mathbb{B}(x,r)$ là $\mathcal{F}$-mở nên G là $\mathcal{F}$-mở.

Vậy tôpô Euclidean yếu hơn $\mathcal{F}$-tôpô.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa, mệnh đề đã biết.

Định nghĩa 1.1.5 ([47])**.** Hàm f xác định trên tập $\mathcal{F}$-mở $U \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm ***$\mathcal{F}$-điều hòa dưới*** nếu:

(i) f là $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên;

(ii) $f(z) \leqslant \int_{\partial_{\mathcal{F}} V} f d\delta_z^{U\setminus V}$ với V trong một cơ sở địa phương của $\mathcal{F}$-tôpô tại z;

(iii) $f \not\equiv -\infty$ trên mỗi $\mathcal{F}$-thành phần của U.

Định nghĩa 1.1.6 ([47])**.** Cho Ω là một tập con $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$. Hàm $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ được gọi là ***$\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới***, nếu f là $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên và với mỗi đường thẳng phức l trong $\mathbb{C}^n$, hạn chế của f tới bất kì $\mathcal{F}$-thành phần của tập con $\mathcal{F}$-mở $l \cap \Omega$ của l là $\mathcal{F}$-điều hòa dưới hoặc đồng nhất bằng $-\infty$.

Ví dụ: Mọi hàm đa điều hòa dưới trên tập mở Euclidean U trong $\mathbb{C}^n$ đều là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên U.

Mệnh đề 1.1.7 ([21])**.** *Giả sử G và U là các tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $G \subseteq U$. Giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(U)$, $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(G)$ và $\mathcal{F}\text{-}\limsup\limits_{G \ni z \to \zeta} v(z) \leqslant u(\zeta)$ với mọi $\zeta \in \partial_{\mathcal{F}} G \cap U$. Khi đó, hàm*

$$w(z) = \begin{cases} \max(u(z), v(z)) & \textit{nếu } z \in G, \\ u(z) & \textit{nếu } z \in U \setminus G, \end{cases}$$

thuộc $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(U)$.

Sau đây, ta nhắc lại một số tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trong [20].

Mệnh đề 1.1.8. *Giả sử* Ω *là tập con mở Euclidean của* $\mathbb{C}^n$*.*

Với hàm $f : \Omega \to [-\infty; +\infty)$*, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) f *là hàm đa điều hòa dưới (theo nghĩa thông thường).*

(ii) f *là hàm* $\mathcal{F}$*-đa điều hòa dưới C-mạnh (tức là, với mọi* $z \in \Omega$*, tồn tại một lân cận compact* K *của* z *trong* Ω *và một dãy* $\{f_j\}$ *các hàm đa điều hòa dưới trong lân cận mở Euclidean của* K *sao cho* $\{f_j\}$ *hội tụ đều đến* f *trên* K*) và không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên bất kì thành phần của* Ω*.*

(iii) f *là hàm* $\mathcal{F}$*-đa điều hòa dưới và không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần của* Ω*.*

Chúng tôi phát biểu và chứng minh hai mệnh đề sau đây mà chúng đã được dùng trong Chương 3.

Mệnh đề 1.1.9. *Giả sử* Ω *là tập* $\mathcal{F}$*-mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$*. Giả sử* $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ *là hàm lồi tăng. Khi đó* $\chi \circ u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$*.*

Chứng minh. Theo Định lí 1.2.2, tồn tại một tập đa cực $\mathcal{F}$-đóng, $E \subset \Omega$ sao cho với mỗi $z \in \Omega \backslash E$, tồn tại một tập $\mathcal{F}$-mở $O_z \subset \Omega$ và một dãy giảm của các hàm đa điều hòa dưới $\{\varphi_j\}$ xác định trên lân cận mở Euclidean của O_z sao cho $\varphi_j \searrow u$ trên O_z. Từ $\chi \circ \varphi_j$ là các hàm đa điều hòa dưới trên các lân cận mở Euclidean của O_z và $\chi \circ \varphi_j \searrow \chi \circ u$ trên O_z, thì theo Định lí 3.9 trong [20] ta có $\chi \circ u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(O_z)$. Do đó, $\chi \circ u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega \backslash E)$. Hơn nữa, từ $\chi \circ u$ là $\mathcal{F}$-liên tục trên Ω, thì theo Định lí 3.7 trong [20] suy ra rằng $\chi \circ u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$. □

Mệnh đề 1.1.10. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và φ là hàm đa điều hòa dưới chặt trên $\mathbb{C}^n$, tức là với mọi $z \in \mathbb{C}^n$, tồn tại lân cận mở Euclidean U của z và $c > 0$ sao cho hàm $\varphi - c|z|^2$ là đa điều hòa dưới trên U. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ sao cho*

$$\int\limits_{\Omega\cap\{-\infty<u<v\}} (dd^c\varphi)^n = 0.$$

Khi đó $u \geq v$ trên Ω.

Chứng minh. Giả sử $z \in \Omega \cap \{u > -\infty\}$ và $\lambda > 0$ với $u(z) > -\lambda$. Chọn $r > 0$ và $\psi \in \mathcal{PSH}^-(\mathbb{B}(z,r))$ sao cho

$\psi(z) > -\frac{1}{2}$ và $\mathbb{B}(z,r) \cap \{\psi > -1\} \subset \Omega$.

Đặt

$$f := \begin{cases} \max(-4\lambda, u + 4\lambda\psi) & \text{trên } \Omega \\ -4\lambda & \text{trên } \mathbb{B}(z,r)\backslash\Omega \end{cases}$$

và

$$g := \begin{cases} \max(-4\lambda, v + 4\lambda\psi) & \text{trên } \Omega \\ -4\lambda & \text{trên } \mathbb{B}(z,r)\backslash\Omega. \end{cases}$$

Theo Mệnh đề 1.1.7 và Mệnh đề 1.1.8, suy ra $f, g \in \mathcal{PSH}^-(\mathbb{B}(z,r))$. Từ giả thiết, ta có

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{B}(z,r)\cap\{-\infty<f<g\}} (dd^c\varphi)^n \leq \int\limits_{\Omega\cap\{-\infty<u<v\}} (dd^c\varphi)^n \leq 0.$$

Điều này suy ra $f \geq g$ trên $\mathbb{B}(z,r)$. Vì thế , $u(z) \geq v(z)$, và do đó, $u \geq v$ trên $\Omega \cap \{u > -\infty\}$. Từ u, v là $\mathcal{F}$-liên tục, theo Định lí 3.7

trong [20], ta có được $u \geq v$ trên Ω. $\square$

1.2 Toán tử Monge-Ampère phức

Trước hết, chúng tôi nhắc lại hai định nghĩa và hai định lí trong [22].

Định nghĩa 1.2.1. Bởi $QB(\mathbb{C}^n)$, ta hiểu đó là σ-đại số trên $\mathbb{C}^n$ được sinh bởi các tập Borel và các tập con đa cực của $\mathbb{C}^n$.

Định lí 1.2.2 ([22])**.** *Giả sử u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên U. Khi đó tồn tại tập đa cực $\mathcal{F}$-đóng E trong U sao cho u là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới C-mạnh trên $U \backslash E$.*

Định lí 1.2.3 ([22])**.** *Giả sử u_1, u_2, v_1, v_2 là các hàm đa điều hòa dưới trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Nếu $u_1 - u_2 = v_1 - v_2$ trên tập $\mathcal{F}$-mở $\mathcal{O} \subset \Omega$ thì $(dd^c(u_1 - u_2))^n|_{\mathcal{O}} = (dd^c(v_1 - v_2))^n|_{\mathcal{O}}$.*

Từ kết quả trên, ta có thể xác định được toán tử Monge-Ampère cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn. Ta có

Định nghĩa 1.2.4. Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và $QB(\Omega)$ là hạn chế của $QB(\mathbb{C}^n)$ trên Ω. Giả sử $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn. Sử dụng tính chất tựa-Lindelöf của $\mathcal{F}$-tôpô và Định lí 1.2.2, tồn tại một tập đa cực $E \subset \Omega$, một dãy của các tập con $\mathcal{F}$-mở $\{O_k\}$ và các hàm đa điều hòa dưới $f_{j,k}, g_{j,k}$ xác định trên các lân cận Euclidean của $\overline{O}_k$ sao cho $\Omega = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ và $u_j = f_{j,k} - g_{j,k}$ trên O_k.

Ta định nghĩa $O_0 := \emptyset$ và

$$\begin{aligned}&\int\limits_A dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n := \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{A\cap(O_j\setminus\bigcup_{k=0}^{j-1}O_k)} dd^c(f_{1,j}-g_{1,j})\wedge\ldots\wedge dd^c(f_{n,j}-g_{n,j}),\end{aligned} \tag{1.1}$$

$A \in QB(\Omega)$.

Theo Định lí 1.2.3, công thức (1.1) xác định một độ đo trên E.

Chú ý rằng độ đo này không phụ thuộc vào $\{O_k\}$, $\{f_{j,k}\}$ và $\{g_{j,k}\}$. Ta nói nó là *độ đo Monge-Ampère phức* của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số kết quả thông qua ba mệnh đề, mà chúng đã được sử dụng trong Chương 3.

Mệnh đề 1.2.5 ([8])**.** *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn. Khi đó*

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n \text{ là một độ đo không âm trong } QB(\Omega).$$

Mệnh đề 1.2.6. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo không âm trên $QB(\Omega)$. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn sao cho $(dd^c u)^n \geq \mu$ và $(dd^c v)^n \geq \mu$ trên Ω. Khi đó*

$$(dd^c \max(u,v))^n \geq \mu \text{ trên } \Omega.$$

Chứng minh. Đặt $v_j := \max(u, v - \frac{1}{j})$, ở đó $j \in \mathbb{N}^*$.

Theo Định lí 4.8 trong [22], ta có

$$\begin{aligned}(dd^c v_j)^n &\geq 1_{\{u\geq v\}}(dd^c u)^n + 1_{\{u<v-\frac{1}{j}\}}(dd^c v)^n \\ &\geq 1_{\{u\geq v\}\cup\{u<v-\frac{1}{j}\}}\mu.\end{aligned}$$

Từ $v_j \nearrow \max(u, v)$ trên Ω, theo Định lí 4.5 trong [21], ta có được

$(dd^c \max(u, v))^n \geq \mu$ trên Ω. □

Kết quả sau đây cho chúng ta tính tựa-liên tục của toán tử Monge-Ampère và các dãy đơn điệu $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Mệnh đề 1.2.7. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ là hữu hạn. Giả sử $\{u_j\}$ là một dãy đơn điệu của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm, hữu hạn, sao cho $u_j \to u$ h.k.n. trên Ω. Khi đó*

$$\int\limits_{\Omega} f(dd^c u)^n \leq \liminf_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} f(dd^c u_j)^n,$$

với mỗi hàm f không âm, bị chặn, $\mathcal{F}$-liên tục trên Ω.

Chứng minh. Theo Định lí 3.9 trong [20], tồn tại một tập đa cực, $\mathcal{F}$-đóng $E \subset \Omega$ sao cho $u_j \to u$ trên $\Omega \backslash E$. Theo Định lí 4.5 trong [21], ta tìm được dãy độ đo $(dd^c u_j)^n$ hội tụ $\mathcal{F}$-địa phương tới $(dd^c u)^n$ trên $\Omega \backslash E$. Sử dụng tính chất tựa-Lindelöf của $\mathcal{F}$-tôpô (Định lí 1.1.3), tồn tại một tập đa cực $F \subset \Omega \backslash E$, một dãy các tập con $\mathcal{F}$-mở $\{O_k\}$ và các hàm không âm $\mathcal{F}$-liên tục χ_k trên $\mathbb{C}^n$ với giá compact trong O_k sao cho $\Omega \backslash E = F \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$, $0 \leq \chi_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k = 1$ trên $\Omega \backslash (E \cup F)$ và

$$\int\limits_{O_k} f\chi_k(dd^c u)^n = \lim_{j \to +\infty} \int\limits_{O_k} f\chi_k(dd^c u_j)^n, \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} f(dd^c u)^n &= \int\limits_{\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k} f(dd^c u)^n \\ &= \sup_{l \geq 1} \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{O_k} f\chi_k(dd^c u)^n\end{aligned}$$

$$= \sup_{l\geq 1} \lim_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} f\left(\sum_{k=1}^{l} \chi_k\right) (dd^c u_j)^n$$
$$\leq \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} f (dd^c u_j)^n.$$

□

1.3 Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Bây giờ ta giới thiệu lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới có nhiều tiện ích trong Lí thuyết $\mathcal{F}$-đa thế vị.

Định nghĩa 1.3.1 ([21]). Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập $\mathcal{F}$-mở và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Ta nói rằng u là $\mathcal{F}$-*cực đại* trên Ω nếu với mỗi tập $\mathcal{F}$-mở bị chặn G của $\mathbb{C}^n$ với $\overline{G} \subset \Omega$, và với mỗi hàm $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(G)$ sao cho v bị chặn trên trên G và mở rộng $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên tới $\overline{G}^{\mathcal{F}}$, thỏa mãn

$$v \leqslant u \text{ trên } \partial_{\mathcal{F}} G \Rightarrow v \leqslant u \text{ trên } G.$$

Ví dụ: Mọi hàm đa điều hòa dưới cực đại bị chặn trên tập mở Euclidean U trong $\mathbb{C}^n$ đều là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên U.

Trong bài báo [21], El Kadiri và Smit đã chứng minh một số tính chất cơ bản của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới cực đại. Họ đã chứng minh một điều kiện cần để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới là $\mathcal{F}$-cực đại.

Mệnh đề 1.3.2 ([21]). *Giả sử f là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại, hữu hạn trên $\mathcal{F}$-miền U trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta có $(dd^c f)^n = 0$.*

Các kết quả quan trọng về hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại được chúng tôi phát biểu và chứng minh trong hai mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.3.3. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn trên Ω.*

Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

(a) $u \in \mathcal{F}$-$\mathcal{MPSH}(\Omega)$.

(b) $u + g \in \mathcal{F}$-$\mathcal{MPSH}(\Omega)$, với mỗi hàm đa điều hòa g trên $\mathbb{C}^n$.

(c) Với mỗi $v \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$ và với mỗi tập $\mathcal{F}$-mở $G \subset \Omega$ với $\overline{G} \subset \Omega$, ta có

$$\sup_G (v - u) \leq \sup_{\Omega \setminus G} (v - u).$$

Chứng minh. (a) $\Leftrightarrow$ (b) là rõ ràng.

(a) $\Rightarrow$ (c). Giả sử $v \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$ và giả sử G là một tập $\mathcal{F}$-mở với $\overline{G} \subset \Omega$. Đặt

$$M := \sup_{\Omega \setminus G} (v - u).$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $M < +\infty$. Khi đó, $v - M \leq u$ trên $\Omega \setminus G$. Đặc biệt, $v - M \leq u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$, và vì thế, $v - M \leq u$ trên G. Vì vậy,

$$\sup_G (v - u) \leq M = \sup_{\Omega \setminus G} (v - u).$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Giả sử G là một tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ với $\overline{G} \subset \Omega$, và giả sử $v \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(G)$ sao cho v bị chặn trên trên G, mở rộng $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên tới $\overline{G}^{\mathcal{F}}$, và $v \le u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$. Đặt

$$\varphi := \begin{cases} \max(v,u) & \text{trên } G, \\ u & \text{trên } \Omega \backslash G. \end{cases}$$

Theo Mệnh đề 1.1.7, ta có $\varphi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Suy ra

$$\sup_G (v-u) \le \sup_G (\varphi - u) \le \sup_{\Omega \backslash G} (\varphi - u) = 0.$$

Vì thế, $v \le u$ trên G. □

Mệnh đề 1.3.4. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn trên Ω. Giả sử với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$, tồn tại một lân cận mở Euclidean $V_z \subset \mathbb{C}^n$ của z sao cho $u|_{V_z \cap \Omega}$ là $\mathcal{F}$-cực đại trên $V_z \cap \Omega$. Khi đó, u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω.*

Chứng minh. Giả sử v là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω và giả sử G là tập $\mathcal{F}$-mở bị chặn trên $\mathbb{C}^n$ sao cho $\overline{G} \subset \Omega$. Chọn $R > 0$ sao cho $\overline{G} \subset \mathbb{B}(0,R)$. Cho $\varepsilon > 0$. Đặt $v_\varepsilon(z) := v(z) + \varepsilon |z|^2$, $z \in \Omega$. Chọn $\{p_j\} \subset G$ sao cho $p_j \to p \in \overline{G}$ và

$$\lim_{j \to +\infty} [v_\varepsilon(p_j) - u(p_j)] = \sup_G (v_\varepsilon - u).$$

Cho $r > 0$, sao cho $\mathbb{B}(p, 3r) \Subset \mathbb{B}(0,R)$ và u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên $\mathbb{B}(p,3r) \cap \Omega$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\{p_j\} \subset \mathbb{B}(p,r)$. Đặt

$$g_{\varepsilon,j}(z) := \varepsilon |z - p_j|^2 - \varepsilon |z|^2,\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Rõ ràng rằng $g_{\varepsilon,j}$ là các hàm đa điều hòa trên $\mathbb{C}^n$. Theo Mệnh đề 1.3.3 ta có $u + g_{\varepsilon,j}$ là các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên $\mathbb{B}(p,3r) \cap \Omega$, và vì thế, lần nữa áp dụng Mệnh đề 1.3.3, ta được

$$\begin{aligned}
\sup_G(v_\varepsilon - u) &= \lim_{j\to+\infty}[v(p_j) - u(p_j) - g_{\varepsilon,j}(p_j)] \\
&\le \sup_{G\cap\mathbb{B}(p,2r)}(v - u - g_{\varepsilon,j}) \\
&\le \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(p,3r))\setminus(G\cap\mathbb{B}(p,2r))}(v - u - g_{\varepsilon,j}) \\
&\le \max\left(\sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(p,3r))\setminus G}(v - u - g_{\varepsilon,j}), \sup_{G\setminus(\mathbb{B}(p,2r))}(v - u - g_{\varepsilon,j})\right) \\
&\le \max\left(\sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(p,3r))\setminus G}(v_\varepsilon - u), \sup_{G\setminus(\mathbb{B}(p,2r))}(v_\varepsilon - u - \varepsilon r^2)\right).
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega\cap\mathbb{B}(0,R)}(v_\varepsilon - u) &= \max(\sup_{G\cap\mathbb{B}(0,R)}(v_\varepsilon - u), \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v_\varepsilon - u)) \\
&\le \max(\sup_{\Omega\cap\mathbb{B}(p,3r)}(v_\varepsilon - u) - \varepsilon r^2, \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v_\varepsilon - u)) \\
&\le \max(\sup_{\Omega\cap\mathbb{B}(0,R)}(v_\varepsilon - u) - \varepsilon r^2, \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v_\varepsilon - u)).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sup_{\Omega\cap\mathbb{B}(0,R)}(v_\varepsilon - u) = \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v_\varepsilon - u).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\sup_G(v - u) &\le \sup_G(v_\varepsilon - u) \\
&\le \sup_{\Omega\cap\mathbb{B}(0,R)}(v_\varepsilon - u) - \varepsilon r^2 \\
&= \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v_\varepsilon - u) - \varepsilon r^2 \\
&< \sup_{(\Omega\cap\mathbb{B}(0,R))\setminus G}(v - u) + \varepsilon R^2
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\Omega \setminus G}(v-u) + \varepsilon R^2.$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$, ta được

$$\sup_{G}(v-u) \leq \sup_{\Omega \setminus G}(v-u).$$

Theo Mệnh đề 1.3.3 cho ta thấy u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trong Ω. $\square$

Kết luận của Chương 1

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày một số kiến thức cần thiết về $\mathcal{F}$-tôpô, định nghĩa và một số tính chất của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại. Đồng thời cũng đã đưa ra một số kết quả ([39], [40], [46]) mà đã được sử dụng trong các chương sau. Cụ thể, đã đưa ra định nghĩa về Toán tử Monge-Ampère phức mà đã sử dụng trong hai chương sau, đã đưa ra Mệnh đề 1.3.3, Mệnh đề 1.3.4 (đã được sử dụng trong Chương 2) và các Mệnh đề 1.1.9, Mệnh đề 1.1.10, Mệnh đề 1.2.5, Mệnh đề 1.2.6 Mệnh đề 1.2.7 (đã được sử dụng trong Chương 3).

Chương 2

Tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Như đã trình bày ở phần Mở đầu, trong chương này chúng tôi đưa ra những điều kiện để tính chất $\mathcal{F}$-cực đại của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$ nhận được từ tính chất $\mathcal{F}$-cực đại địa phương trên Ω. Cụ thể: Định lí 2.1.2 chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng kết quả trên, thay thế điều kiện *liên tục* trong Định lí 2.1.2 bởi điều kiện "yếu" hơn là *bị chặn* của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$. Kết quả nhận được là Định lí 2.2.2, chỉ ra rằng tính chất $\mathcal{F}$-cực đại là tương đương với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương.

2.1 Tính cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục

Trong mục này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

Trước hết, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập $\mathcal{F}$-mở và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Hàm u được gọi là *$\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương* trên Ω nếu với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$, tồn tại một lân cận $\mathcal{F}$-mở $V_z \subset \mathbb{C}^n$ của z, sao cho $u|_{V_z \cap \Omega}$ là $\mathcal{F}$-cực đại trên $V_z \cap \Omega$.

Kết quả quan trọng nhất của mục này là định lí sau đây.

Định lí 2.1.2. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục trên Ω. Khi đó u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω nếu và chỉ nếu nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.*

Chứng minh. Chứng minh điều kiện cần là rõ ràng.

Bây giờ ta đưa ra chứng minh của điều kiện đủ. Theo Mệnh đề 1.3.4, việc còn lại là chứng minh u là $\mathcal{F}$-cực đại địa phương trên Ω, và vì thế, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\Omega \subset \mathbb{B}(0, R)$. Giả sử G là một tập $\mathcal{F}$-mở, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với $\overline{G} \subset \Omega$, và giả sử $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(G)$ sao cho v bị chặn trên trên G, thác triển $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên tới $\overline{G}^{\mathcal{F}}$ và $v \leq u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$. Giả sử $\varepsilon > 0$.

Đặt

$$v_\varepsilon(z) := \begin{cases} \max(v(z) + \varepsilon(|z|^2 - R^2), u(z)) & \text{nếu } z \in G, \\ u(z) & \text{nếu } z \in \Omega \backslash G. \end{cases}$$

Theo Mệnh đề 1.1.7, ta có $v_\varepsilon \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$.

Giả sử

$$\sup_G (v_\varepsilon - u) > \delta_0 > 0.$$

Chọn $\{p_j\} \subset G$ sao cho $p_j \to p \in \overline{G}$, $v_\varepsilon(p_j) - u(p_j) > \delta_0$ với mọi $j \geq 1$ và

$$\begin{aligned} \lim_{j \to +\infty} [v_\varepsilon(p_j) - u(p_j)] &= \sup_G (v_\varepsilon - u) \\ &= \sup_\Omega (v_\varepsilon - u). \end{aligned}$$

Trước hết, ta chứng minh

$$\limsup_{j \to +\infty} v_\varepsilon(p_j) \leq v_\varepsilon(p).$$

Thật vậy, giả sử $\delta \in (0, \delta_0)$. Từ u là liên tục trên $\overline{G}$ nên tồn tại một hàm trơn f xác định trên $\mathbb{C}^n$, sao cho

$$u \leq f \leq u + \delta \text{ trên } \overline{G}.$$

Chọn $\varphi, \psi \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B}(0, R)) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}(0, R))$, sao cho

$$f = \varphi - \psi \text{ trên } \mathbb{B}(0, R).$$

Đặt

$$w := \begin{cases} \max(v_\varepsilon + \psi, f + \psi) & \text{trên } G, \\ f + \psi & \text{trên } \mathbb{B}(0, R) \backslash G. \end{cases}$$

Từ $v_\varepsilon \leq u \leq f$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$, từ Mệnh đề 1.1.7, ta có $w \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\mathbb{B}(0,R))$, và vì thế, theo Mệnh đề 1.1.8, ta có $w \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B}(0,R))$. Do đó, w là hàm nửa liên tục trên trên $\mathbb{B}(0,R)$.

Bởi vì

$$v_\varepsilon(p_j) - f(p_j) \geq v_\varepsilon(p_j) - u(p_j) - \delta > 0,$$

ta có $w(p_j) = v_\varepsilon(p_j) + \psi(p_j)$.

Ta suy ra

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to+\infty} v_\varepsilon(p_j) &= \limsup_{j\to+\infty}[w(p_j) - \psi(p_j)] \\ &\leq w(p) - \psi(p) \leq \max(v_\varepsilon(p), f(p)) \\ &\leq \max(v_\varepsilon(p), u(p) + \delta).\end{aligned}$$

Cho $\delta \searrow 0$, ta có

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to+\infty} v_\varepsilon(p_j) &\leq \max(v_\varepsilon(p), u(p)) \\ &= v_\varepsilon(p).\end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

Bây giờ, do u là hàm liên tục nên ta có

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(p) - u(p) &\leq \sup_\Omega (v_\varepsilon - u) \\ &= \limsup_{j\to+\infty}[v_\varepsilon(p_j) - u(p_j)] \\ &= \limsup_{j\to+\infty} v_\varepsilon(p_j) - u(p) \\ &\leq v_\varepsilon(p) - u(p).\end{aligned}$$

Do đó

$$v_\varepsilon(p) - u(p) = \sup_G (v_\varepsilon - u) = \sup_\Omega (v_\varepsilon - u) > 0.$$

Suy ra $p \in \Omega \cap \{v_\varepsilon > u\}$. Theo Định lí 3.1 trong [26], điều này dẫn đến $\Omega \cap \{v_\varepsilon > u\}$ là lân cận $\mathcal{F}$-mở của p.

Giả sử $r > 0$ và giả sử $\phi \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B}(p, 2r))$, sao cho
$\phi(p) = 0$, $\mathbb{B}(p, 2r) \cap \{\phi > -2\} \subset \Omega \cap \{v_\varepsilon > u\}$
và u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên $\mathbb{B}(p, 2r) \cap \{\phi > -2\}$.
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử ϕ bị chặn trên $\mathbb{B}(p, 2r)$.
Đặt

$$g(z) := \varepsilon|z - p|^2 - \varepsilon(|z|^2 - R^2),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Từ g là hàm đa điều hòa trên $\mathbb{C}^n$, theo Mệnh đề 1.3.3, ta có $u + g$ là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên $\mathbb{B}(p, 2r) \cap \{\phi > -2\}$.
Lấy $\delta > 0$. Một lần nữa, bằng cách áp dụng Mệnh đề 1.3.3, ta được

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega (v_\varepsilon - u) &= v_\varepsilon(p) - u(p) \\
&= v(p) + \delta\phi(p) - u(p) - g(p) \\
&\le \sup_{(\mathbb{B}(p,2r)\cap\{\phi>-2\})\setminus(\mathbb{B}(p,r)\cap\{\phi>-1\})} (v + \delta\phi - u - g) \\
&\le \max\Bigg(\sup_{\mathbb{B}(p,2r)\cap\{-2<\phi\le-1\}} (v + \delta\phi - u - g), \\
&\qquad \sup_{(\mathbb{B}(p,2r)\cap\{\phi>-2\})\setminus\mathbb{B}(p,r)} (v + \delta\phi - u - g) \Bigg) \\
&\le \max\Bigg(\sup_{\mathbb{B}(p,2r)\cap\{-2<\phi\le-1\}} (v_\varepsilon - \delta - u),
\end{aligned}$$

$$\left. \sup_{(\mathbb{B}(p,2r)\cap\{\phi>-2\})\setminus\mathbb{B}(p,r)} (v_\varepsilon + \delta\phi - u - \varepsilon r^2) \right)$$

$$\leq \max\left(\sup_{\Omega}(v_\varepsilon - u) - \delta, \sup_{\mathbb{B}(p,2r)\cap\{\phi>-2\}} (v_\varepsilon + \delta\phi - u - \varepsilon r^2) \right).$$

Suy ra

$$\sup_{\Omega}(v_\varepsilon - u) \leq \sup_{\mathbb{B}(p,2r)\cap\{\phi>-2\}} (v_\varepsilon + \delta\phi - u - \varepsilon r^2)$$

$$\leq \sup_{\Omega}(v_\varepsilon - u) + \delta \sup_{\mathbb{B}(p,2r)} \phi - \varepsilon r^2.$$

Cho $\delta \searrow 0$, ta được

$$\sup_{\Omega}(v_\varepsilon - u) \leq \sup_{\Omega}(v_\varepsilon - u) - \varepsilon r^2.$$

Điều này không thể. Do đó,

$$\sup_{G}(v_\varepsilon - u) \leq 0.$$

Vì vậy

$$\sup_{G}(v - u) \leq \sup_{G}(v_\varepsilon - u) + \varepsilon R^2 \leq \varepsilon R^2.$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$, ta được

$$\sup_{G}(v - u) \leq 0.$$

Suy ra $v \leq u$ trên G. Vì thế, u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω. □

2.2 Tính cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn

Trong mục này, chúng tôi sẽ chỉ ra điều kiện "yếu" hơn là *bị chặn* của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, để đảm bảo điều kiện cần và đủ, một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương, đó là mở rộng kết quả ở mục trên, với một kĩ thuật chứng minh mới. Đây là một trong số các kết quả có ý nghĩa khoa học, vì nó đúng cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các tập $\mathcal{F}$-mở. Ngoài ra, chúng tôi cũng chỉ ra một ứng dụng đối với một lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại bị chặn.

Trước hết, ta cần phát biểu và chứng minh bổ đề quan trọng sau đây.

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử D là miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $\{\varphi_j\}$ là một dãy các hàm đa điều hòa dưới xác định trên các tập con mở Euclidean U_j của D sao cho*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \Subset D.$$

Khi đó, tồn tại một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới âm bị chặn $\{\psi_k\}$ trên D sao cho:

(i) $\psi_k \to 0$ trên $D \backslash E$, ở đó $E \subset D$ là tập đa cực;

(ii) φ_j liên tục trên $U_j \cap \{\psi_k > -1\}$, với mọi $j, k \geq 1$.

Chứng minh. Theo tính tựa-liên tục đối với các hàm đa điều hòa dưới, tồn tại một dãy các tập con mở $\{G_{j,l}\}$ của U_j sao cho φ_j là liên tục trên $U_j \backslash G_{j,l}$ và

$$C_n(G_{j,l}, U_j) < \frac{1}{2^{j+l}},$$

ở đó $C_n(G_{j,l}, U_j)$ là dung lượng của $G_{j,l}$ đối với U_j và được xác định bởi

$$C_n(G_{j,l}, U_j) := \sup\left\{\int\limits_{G_{j,l}} (dd^c w)^n : w \in \mathcal{PSH}(U_j),\ -1 \le w \le 0\right\}.$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, xác định

$$\psi_k := \left(\sup\left\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(D) : \varphi \le -1 \text{ trên } \bigcup_{\min(j,l)\ge k} G_{j,l}\right\}\right)^*,$$

ở đó * kí hiệu chính qui hóa nửa liên tục trên D.

Các hàm $\psi_k \in \mathcal{PSH}^-(D)$ và $-1 \le \psi_k \le \psi_{k+1} \le 0$ trên D.

Từ φ_j liên tục trên $U_j \backslash G_{j,k}$ và $\psi_k = -1$ trên $G_{j,k}$, hàm φ_j liên tục trên $U_j \cap \{\psi_k > -1\}$.

Bây giờ, từ $\bigcup\limits_{\min(j,l)\ge k} G_{j,l} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k \Subset D$ và $\bigcup\limits_{\min(j,l)\ge k} G_{j,l}$ là các tập mở Euclidean, Hệ quả 4.6.2 trong [43] cho ta

$$\int\limits_D (dd^c\psi_k)^n = C_n\left(\bigcup_{\min(j,l)\ge k} G_{j,l}, D\right).$$

Đặt $\psi := \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$ trên D và $E := D \cap \{\psi < \psi^*\}$.

Khi đó

$\psi^* \in \mathcal{PSH}^-(D) \cap L^\infty(\Omega), -1 \le \psi^* \le 0, \lim\limits_{z\to\partial D} \psi^*(z) = 0,$

$\psi_k \nearrow \psi^*$ h.k.n. và E là tập con đa cực của D.

Theo tính chất tựa-liên tục của toán tử Monge-Ampère, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_D (dd^c\psi^*)^n &\le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_D (dd^c\psi_k)^n \\ &= \liminf_{k\to\infty} C_n\left(\bigcup_{\min(j,l)\ge k} G_{j,l}, D\right)\end{aligned}$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{\min(j,l)\geq k} C_n\left(G_{j,l}, D\right)$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{\min(j,l)\geq k} \frac{1}{2^{j+l}} = 0.$$

Vì thế, Hệ quả 3.7.4 trong [43] suy ra $\psi^* = 0$. □

Kết quả quan trọng nhất của mục này là định lí sau đây.

Định lí 2.2.2. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là bị chặn. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.*

(i) u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω.

(ii) u là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

(iii) $(dd^c u)^n = 0$ trên $QB(\Omega)$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) là hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) xem Định lí 4.15 trong [21].

Bây giờ ta chứng minh (iii) $\Rightarrow$ (i).

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $-1 \leq u \leq 0$ trên Ω.

Theo Định lí 4.15 trong [21] nên tồn tại một tập con đa cực $\mathcal{F}$-đóng F của Ω sao cho u là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên $\Omega\backslash F$. Cố định $z \in \Omega\backslash F$. Chọn $r_z > 0$ và $\varphi_z \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B}(z, r_z)) \cap L^\infty(\mathbb{B}(z, r_z))$ sao cho

$\varphi_z(z) > 0$, $U_z := \mathbb{B}(z, r_z) \cap \{\varphi_z > 0\} \subset \Omega\backslash F$ và u là $\mathcal{F}$-cực đại trên U_z.

Theo tính chất tựa-Lindelöf của $\mathcal{F}$-tôpô nên tồn tại một dãy $\{z_j\}$ và một tập đa cực $\mathcal{F}$-đóng P chứa F sao cho

$$\Omega = P \cup \bigcup_{j=1}^{+\infty} U_{z_j}.$$

Theo Mệnh đề 2.5 trong [21], ta chỉ cần chứng minh u là $\mathcal{F}$-cực đại trên $\Omega\setminus P$. Giả sử G là một tập $\mathcal{F}$-mở bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với $\overline{G} \subset \Omega\setminus P$ và giả sử $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(G)$ sao cho v bị chặn trên trên G, thác triển $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên tới $\overline{G}^{\mathcal{F}}$ và $v \leq u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$. Cố định $0 < r < R < +\infty$ sao cho $\overline{G} + \mathbb{B}(0, 3r) \Subset \mathbb{B}(0, R)$. Theo Bổ đề 2.2.1, tồn tại một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới âm, bị chặn $\{\psi_k\}$ trên $\mathbb{B}(0, 2R)$, sao cho:

(i) $\psi_k \to 0$ trên $\mathbb{B}(0, 2R)\setminus L$, với $L \subset \mathbb{B}(0, 2R)$ là tập đa cực;

(ii) φ_{z_j} liên tục trên $\mathbb{B}(0, R) \cap \mathbb{B}(z_j, r_{z_j}) \cap \{\psi_k > -1\}$ với mọi $j, k \geq 1$.

Ta định nghĩa

$$v_j := \begin{cases} \max(u, v + \psi_j + \frac{1}{j}(|z|^2 - R^2)) & \text{trên } G, \\ u & \text{trên } \Omega\setminus G. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $-1 \leq u \leq v_j \leq 0$ và $u = v_j$ trên $\Omega\setminus G$.

Từ $v + \psi_j + \frac{1}{j}(|z|^2 - R^2) \leq v \leq u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$, theo Mệnh đề 1.1.7, suy ra $v_j \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$.

Giả sử

$$\delta_j := \sup_G (v_j - u) = \sup_\Omega (v_j - u) > 0.$$

Giả sử $\{p_{j,k}\} \subset G$ sao cho $p_{j,k} \to p_j \in \overline{G}$ khi $k \to \infty$

và

$$\lim_{k\to\infty} [v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k})] = \delta_j.$$

Từ $p_j \in \overline{G} \subset \Omega\setminus P \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{z_m}$, tồn tại $m \geq 1$ sao cho $p_j \in U_{z_m}$.

Đặt $r_j := \frac{1}{4}\min(r, r_{z_m} - |z_m - p_j|)$ và đặt $U := \mathbb{B}(p_j, 4r_j) \cap \{\varphi_{z_m} > 0\}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$p_{j,k} \in \mathbb{B}(p_j, r_j)$$

và

$$v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) > \frac{\delta_j}{2} \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Suy ra

$$\psi_j(p_{j,k}) \geq v_j(p_{j,k}) > u(p_{j,k}) + \frac{\delta_j}{2} \geq -1 + \frac{\delta_j}{2}.$$

Vì thế, $p_{j,k} \in \{\psi_j \geq -1 + \frac{\delta_j}{2}\}$ với mọi $k \geq 1$. Hơn nữa, do ψ_j là nửa liên tục trên, cho nên

$$p_j \in \overline{G} \cap \{\psi_j \geq -1 + \frac{\delta_j}{2}\}.$$

Chú ý rằng $p_j, p_{j,k} \in \mathbb{B}(0, R) \cap \mathbb{B}(z_m, r_{z_m}) \cap \{\psi_j > -1\}$ và φ_{z_m} liên tục trên $\mathbb{B}(0, R) \cap \mathbb{B}(z_m, r_{z_m}) \cap \{\psi_j > -1\}$. Khi đó,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{z_m}(p_{j,k}) = \varphi_{z_m}(p_j) > 0.$$

Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$\varphi_{z_m}(p_{j,k}) > \frac{1}{2}\varphi_{z_m}(p_j) \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Đặt

$$h_j := \begin{cases} \max(u, v + \psi_j) & \text{trên } G, \\ u & \text{trên } \Omega \setminus G. \end{cases}$$

Do $v + \psi_j \leq v \leq u$ trên $\partial_{\mathcal{F}} G$ nên theo Mệnh đề 1.1.7, ta có $h_j \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Xét các hàm đa điều hòa $g_{j,k}$ trên $\mathbb{C}^n$, xác định bởi

$$g_{j,k}(z) := \frac{1}{j}|z - p_{j,k}|^2 - \frac{1}{j}(|z|^2 - R^2),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ với $8\varepsilon < \varphi_{z_m}(p_j)$. Khi đó ta có $\varphi_{z_m}(p_{j,k}) > 4\varepsilon$ với mọi $k \geq 1$.

Từ đẳng thức

$$v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) = h_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) - g_{j,k}(p_{j,k}),$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}
&v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) + 4\varepsilon^2 \\
&\leq v_j(p_{j,k}) + \varepsilon\varphi_{z_m}(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) \\
&= [h_j(p_{j,k}) + \varepsilon\varphi_{z_m}(p_{j,k})] - [u(p_{j,k}) + g_{j,k}(p_{j,k})] \\
&\leq \sup_{\mathbb{B}(p_j,3r_j)\cap\{\varphi_{z_m}>2\varepsilon\}} [(h_j + \varepsilon\varphi_{z_m}) - (u + g_{j,k})].
\end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 1.3.3, ta suy ra $u + g_{j,k}$ là các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại trên U. Vì thế, lần nữa, áp dụng Mệnh đề 1.3.3, ta được

$$\begin{aligned}
&v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) + 4\varepsilon^2 \\
&\leq \sup_{\mathbb{B}(p_j,3r_j)\cap\{\varphi_{z_m}>2\varepsilon\}} [(h_j + \varepsilon\varphi_{z_m}) - (u + g_{j,k})] \\
&\leq \sup_{U\setminus(\mathbb{B}(p_j,3r_j)\cap\{\varphi_{z_m}>2\varepsilon\})} [(h_j + \varepsilon\varphi_{z_m}) - (u + g_{j,k})].
\end{aligned}$$

Hơn nữa, từ bao hàm thức

$$\begin{aligned}
&U\setminus(\mathbb{B}(p_j,3r_j)\cap\{\varphi_{z_m} > 2\varepsilon\}) \\
&\subset \ (U\setminus\mathbb{B}(p_j,3r_j)) \cup (\mathbb{B}(p_j,4r_j) \cap \{\ 0 < \varphi_{z_m} \leqslant 2\varepsilon\}),
\end{aligned}$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}
&v_j(p_{j,k}) - u(p_{j,k}) + 4\varepsilon^2 \\
&\leq \max\Bigg(\sup_{U\setminus\mathbb{B}(p_j,3r_j)} [(h_j + \varepsilon\varphi_{z_m}) - (u + g_{j,k})],
\end{aligned}$$

$$\sup_{\mathbb{B}(p_j,4r_j)\cap\{0<\varphi_{z_m}<2\varepsilon\}}[(h_j+\varepsilon\varphi_{z_m})-(u+g_{j,k})]\Bigg).$$

Chú ý rằng $p_{j,k}\in\mathbb{B}(p_j,r_j)$ và đánh giá sau đây

$h_j-g_{j,k}\le v_j-\frac{1}{j}|z-p_{j,k}|^2\leqslant\ v_j$ trên U,

ta đạt được

$$h_j-g_{j,k}\le v_j-\frac{1}{j}|z-p_{j,k}|^2\le v_j-\frac{r_j^2}{j}\text{ trên }U\backslash\mathbb{B}(p_j,3r_j).$$

Vì thế,

$$\begin{aligned}
&v_j(p_{j,k})-u(p_{j,k})+4\varepsilon^2\\
&\le\max\Bigg(\sup_{U\backslash\mathbb{B}(p_j,3r_j)}(v_j+\varepsilon\varphi_{z_m}-u-\frac{r_j^2}{j}),\\
&\qquad\sup_{\mathbb{B}(p_j,4r_j)\cap\{0<\varphi_{z_m}<2\varepsilon\}}(v_j-u+\varepsilon\varphi_{z_m})\Bigg)\\
&\le\max\left(\sup_\Omega(v_j-u)+\varepsilon\sup_{U_{z_m}}\varphi_{z_m}-\frac{r_j^2}{j},\sup_\Omega(v_j-u)+2\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

Bây giờ, cho $k\to\infty$, ta được

$$\begin{aligned}
&\sup_\Omega(v_j-u)+4\varepsilon^2\\
&\le\max\left(\sup_\Omega(v_j-u)+\varepsilon\sup_{U_{z_m}}\varphi_{z_m}-\frac{r_j^2}{j},\sup_\Omega(v_j-u)+2\varepsilon^2\right)\\
&=\sup_\Omega(v_j-u)+\varepsilon\sup_{U_{z_m}}\varphi_{z_m}-\frac{r_j^2}{j}.
\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon\searrow0$ ta nhận được

$$\sup_\Omega(v_j-u)\le\sup_\Omega(v_j-u)-\frac{r_j^2}{j}.$$

Điều này là vô lí. Do đó,

$$\sup_{\Omega}(v_j - u) \leq 0,$$

hoặc ta có

$$v + \psi_j + \frac{1}{j}(|z|^2 - R^2) \leq u \text{ trên } G.$$

Cho $j \nearrow \infty$, ta luôn có $v \leq u$ bên ngoài một tập đa cực L của G.

Từ u, v là $\mathcal{F}$-liên tục, theo Định lí 3.7 trong [20], ta được $v \leq u$ trên G.

Do đó, u là $\mathcal{F}$-cực đại trên $\Omega \backslash P$. □

Từ định lí trên, chúng tôi đưa ra ví dụ về lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới $\mathcal{F}$-cực đại thông qua hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.3. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$ là bị chặn. Khi đó, với $m \in \mathbb{N}^*$, ta có*

$u \circ \pi \in \mathcal{F}$-$\mathcal{MPSH}(\Omega \times \mathbb{C}^m)$,

ở đó $\pi : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ là phép chiếu chính tắc.

Chứng minh. Dễ thấy rằng $u \circ \pi$ là $\mathcal{F}$-liên tục, bị chặn trên $\Omega \times \mathbb{C}^m$. Theo Định lí 1.2.2 có một tập đa cực $\mathcal{F}$-đóng E của Ω, sao cho với bất kì $z \in \Omega \backslash E$, tồn tại một lân cận $\mathcal{F}$-mở K_z của z với $\overline{K}_z \subset \Omega \backslash E$ và một dãy giảm của các hàm đa điều hòa dưới liên tục $\{f_{z,k}\}$ xác định trên các lân cận mở Euclidean $O_{z,k}$ của $\overline{K}_z$ sao cho

$$f_{z,k} \to u \text{ đều trên } \overline{K}_z, \text{ khi } k \to \infty.$$

Từ $f_{z,k} \circ \pi \in \mathcal{PSH}(O_{z,k} \times \mathbb{C}^m)$, nên

$u \circ \pi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(K_z \times \mathbb{C}^m)$.

Vì thế, $u \circ \pi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}((\Omega \backslash E) \times \mathbb{C}^m)$.

Hơn nữa, từ $E \times \mathbb{C}^m$ là một tập đa cực trong $\mathbb{C}^{n+m}$, theo Định lí 3.7 trong [20], ta được $u \circ \pi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega \times \mathbb{C}^m)$.

Tiếp theo, bởi Mệnh đề 3.5 trong [32] ta suy ra $f_{z,k} \circ \pi$ là các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $O_{z,k} \times \mathbb{C}^m$.

Điều này suy ra rằng

$$(dd^c f_{z_j,k} \circ \pi)^{n+m} = 0 \text{ trên } O_{z,k} \times \mathbb{C}^m.$$

Vì thế, theo Hệ quả 4.6 trong [21],

$$(dd^c u \circ \pi)^{n+m} = 0 \text{ trên } K_z \times \mathbb{C}^m,$$

suy ra

$$(dd^c u \circ \pi)^{n+m} = 0 \text{ trên } (\Omega \backslash E) \times \mathbb{C}^m.$$

Từ $E \times \mathbb{C}^m$ là một tập đa cực của $\mathbb{C}^{n+m}$, khi đó ta đi đến

$$(dd^c u \circ \pi)^{n+m} = 0 \text{ trên } \Omega \times \mathbb{C}^m.$$

Theo Định lí 2.2.2, suy ra $u \circ \pi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{MPSH}(\Omega \times \mathbb{C}^m)$. $\square$

Kết luận của Chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày Định lí 2.1.2 và Định lí 2.2.2. Cụ thể, đã đưa ra một kĩ thuật chứng minh mới, đã chứng minh được sự tương đương giữa cực đại địa phương và toàn cục đối với lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$, với điều kiện hàm đó *liên tục* hoặc *bị chặn*. Chúng tôi đã đưa ra Bổ đề 2.2.1 và đã sử dụng bổ đề này để chứng minh Định lí 2.2.2. Chương này cũng đưa ra ví dụ về lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới $\mathcal{F}$-cực đại thông qua Hệ quả 2.2.3.

Chương 3

Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Như đã nói ở phần mở đầu, trong chương này, chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới u trên một tập con mở Euclidean Ω được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Ở đây, việc xấp xỉ hàm u được hiểu theo nghĩa, u có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trơn xác định trên lân cận Euclidean của Ω.

Bằng cách đưa ra các khái niệm miền *$\mathcal{F}$-siêu lồi*, định nghĩa lớp hàm *$\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới* $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, chúng tôi đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên lân cận của Ω.

3.1 Lớp $\mathcal{E}_0$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới

Trước hết, chúng tôi đưa ra khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω.

Định nghĩa 3.1.1. Một $\mathcal{F}$-miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là *$\mathcal{F}$-siêu lồi*, nếu tồn tại hàm γ_Ω xác định trên một miền siêu lồi bị chặn Ω', sao cho $\Omega = \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1\}$ và $-\gamma_\Omega$ là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω, $\gamma_\Omega \in \mathcal{PSH}^-(\Omega')$.

Ta nói rằng, một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm bị chặn u xác định trên một miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn Ω thuộc *lớp* $\mathcal{E}_0(\Omega)$, nếu $\int\limits_\Omega (dd^c u)^n < +\infty$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\overline{\Omega \cap \{u < -\varepsilon\}} \subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1 + \delta\}.$$

Ví dụ: Hàm $u = |z|^2 - 1$ thuộc lớp $\mathcal{E}_0(\mathbb{B}(O,1))$.

Mệnh đề 3.1.2. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó $\mathcal{E}_0(\Omega) \neq \emptyset$.*

Chứng minh. Giả sử Ω' là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $\gamma_\Omega \in \mathcal{PSH}^-(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$ sao cho $\Omega = \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1\}$ và $-\gamma_\Omega \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$.

Giả sử $\psi \in \mathcal{E}_0(\Omega') \cap \mathcal{C}(\Omega')$ sao cho $-1 \le \psi < 0$ trên Ω'.

Chọn $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$G := \{\psi < -2\varepsilon_0\} \cap \{\gamma_\Omega > -1 + 2\varepsilon_0\} \neq \emptyset.$$

Ta định nghĩa

$$\rho := \sup\{\varphi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) : \varphi \le \max(-1 - \gamma_\Omega, \psi) \text{ trên } G\}.$$

Từ $\max(-1-\gamma_\Omega, \psi) \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ và G là $\mathcal{F}$-mở, ta có $\rho \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}^-(\Omega)$.

Giả sử $\varepsilon > 0$, chọn $\delta \in (0, \varepsilon)$. Bởi vì

$$-1 \le \max(-1 - \gamma_\Omega, \psi) \le \rho < 0 \text{ trên } \Omega$$

và γ_Ω là nửa liên tục trên trên Ω', suy ra

$$\begin{aligned}\overline{\{\rho < -\varepsilon\}} &\subset \overline{\{\psi < -\varepsilon\} \cap \{\gamma_\Omega > -1+\varepsilon\}} \\ &\subset \{\psi \le -\varepsilon\} \cap \{\gamma_\Omega \ge -1+\varepsilon\} \\ &\subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1+\delta\}.\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh rằng $\int\limits_\Omega (dd^c\rho)^n < +\infty$.

Đặt

$$u := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\varepsilon_0}, \rho + \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega; \\ -\frac{1}{\varepsilon_0} & \text{trên } \Omega' \backslash \Omega.\end{cases}$$

Từ Mệnh đề 1.1.7 và Mệnh đề 1.1.8, ta được $u \in \mathcal{PSH}(\Omega')$. Theo Mệnh đề 3.2 trong [21] ta có ρ là $\mathcal{F}$-cực đại trên $\{\psi > -2\varepsilon_0\} \cup \{-1 < \gamma_\Omega < -1 + 2\varepsilon_0\}$. Hơn nữa, từ $\rho = u - \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma_\Omega$ trên $\{\gamma_\Omega > -1+\varepsilon_0\}$ và $\{\psi < -\varepsilon_0\} \Subset \Omega'$, thì theo Định lí 4.8 trong [21], suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega (dd^c\rho)^n &= \int\limits_{\{\psi<-\varepsilon_0\}\cup\{\gamma_\Omega>-1+\varepsilon_0\}} (dd^c\rho)^n \\ &= \int\limits_{\Omega'\cap(\{\psi<-\varepsilon_0\}\cup\{\gamma_\Omega>-1+\varepsilon_0\})} (dd^c(u - \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma_\Omega))^n \\ &\le \int\limits_{\Omega'\cap\{\psi<-\varepsilon_0\}} (dd^c(u + \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma_\Omega))^n < +\infty.\end{aligned}$$

Do đó, $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$, và vì thế, $\mathcal{E}_0(\Omega) \neq \emptyset$. □

Chú ý rằng, mỗi miền siêu lồi bị chặn là $\mathcal{F}$-siêu lồi.

Bây giờ ta đưa ra một ví dụ chỉ ra rằng, tồn tại một miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn Ω mà không có điểm trong theo tôpô Euclidean thông thường. Hơn nữa, Ω thỏa mãn giả thiết của Định lí 3.3.1.

Ví dụ 3.1.3. (a) Giả sử Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ và giả sử $\{a_j\} \subset \Delta$ sao cho $\overline{\{a_n\}} = \overline{\Delta}$. Định lí 4.14 trong [2] suy ra tồn tại $\varphi_j \in \mathcal{F}(\Delta)$ sao cho $\varphi_j(a_j) = -\infty$ và

$$dd^c\varphi_j = \frac{1}{2^j}\delta_{a_j} \text{ trên } \Delta,$$

ở đó δ_{a_j} kí hiệu độ đo Dirac tại a_j.

Đặt $\psi_j := \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_j$. Khi đó $\psi_j \in \mathcal{F}(\Delta)$, $\psi_j \geq \psi_{j+1}$ trên Δ và

$$\int\limits_{\Delta} dd^c\psi_j = \int\limits_{\Delta} dd^c\varphi_1 + \cdots + \int\limits_{\Delta} dd^c\varphi_j = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^j} < 1.$$

Định lí 3.7 trong [42] suy ra $\psi = \lim_{j\to+\infty}\psi_j \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Từ $\{a_j\} \subset \{\psi = -\infty\}$ cho nên $\overline{\{\psi = -\infty\}} = \overline{\Delta}$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$\{\psi > -\tfrac{1}{2}\} \neq \emptyset.$$

Từ $dd^c\psi_j = 0$ trên $\Delta\backslash\{a_1, \ldots, a_j\}$ cho nên ψ_j là hàm điều hòa trên $\Delta\backslash\{a_1, \ldots, a_j\}$, và vì thế, ψ_j là liên tục trên $\Delta\backslash\{a_1, \ldots, a_j\}$.

Giả sử Ω là một thành phần liên thông của tập $\mathcal{F}$-mở $\Delta \cap \{\psi > -1\}$.

Khi đó Ω không có điểm trong theo tôpô Euclidean thông thường.

Từ $-\psi$ là $\mathcal{F}$-liên tục và $-\psi_j \nearrow -\psi$ trên Ω, thì theo Định lí 3.9 trong [20], suy ra rằng $-\psi$ là $\mathcal{F}$-điều hòa dưới trên Ω.

Định nghĩa

$$\gamma_\Omega := \begin{cases} \psi & \text{trên } \Omega, \\ -1 & \text{trên } \Delta\backslash\Omega. \end{cases}$$

Khi đó $-\gamma_\Omega$ là $\mathcal{F}$-điều hòa dưới trên Ω. Từ $\psi > -1$ trên Ω, ta có $\gamma_\Omega \in \mathcal{SH}^-(\Delta)$. Do đó, Ω là $\mathcal{F}$-siêu lồi.

(b) Từ $\{a_1, \dots, a_j\} \subset \{\psi_j = -\infty\}$ và ψ_j liên tục trên $\Delta \backslash \{a_1, \dots, a_j\}$ cho nên $\Delta \cap \{\psi_j > -1\}$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử Ω_j là một thành phần liên thông của tập mở $\Delta \cap \{\psi_j > -1\}$, chứa tập Ω. Giả sử $h \in \mathcal{E}_0(\Delta) \cap \mathcal{C}(\overline{\Delta})$ sao cho $-1 \leq h < 0$ trên Δ và

$$G := \Delta \cap \{h < -\frac{1}{2}\} \cap \{\gamma_\Omega > -\frac{1}{2}\} \neq \emptyset.$$

Rõ ràng rằng, $\max(h, -1 - \psi_j)$ là một hàm vét cạn của Ω_j. Vì thế, Ω_j là siêu lồi bị chặn.

Đặt

$$\rho := \sup\{\varphi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) : \varphi \leq \max(-1 - \gamma_\Omega, h) \text{ trên } G\}.$$

Theo chứng minh của Mệnh đề 3.1.2 ta có $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$.

Bây giờ ta đặt

$$\rho_j := \sup\{\varphi \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j) : \varphi \leq \max(-1 - \psi_j, h) \text{ trên } G\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\rho_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j)$. Từ $\psi_j \searrow \gamma_\Omega$ trên Ω cho nên $\rho_j \nearrow \rho$ h.k.n. trong Ω. Do đó, Ω thỏa mãn giả thiết của Định lí 3.3.1.

Sau đây, ta có mệnh đề.

Mệnh đề 3.1.4. *Giả sử Ω miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử rằng $u \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ sao cho $u \leq v < 0$ trên Ω. Khi đó $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và*

$$\int_\Omega (-\rho)(dd^c v)^n \leq \int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n,$$

với mỗi $\rho \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Hơn nữa, nếu $u = v$ *trên* $\{u > -\varepsilon_0\}$ *với* $\varepsilon_0 > 0$, *khi đó*

$$\int\limits_\Omega (dd^c v)^n = \int\limits_\Omega (dd^c u)^n.$$

Chứng minh. Giả sử Ω' là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $\gamma_\Omega \in \mathcal{PSH}^-(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$ sao cho $\Omega = \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1\}$ và $-\gamma_\Omega \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Cố định $\varepsilon > 0$, chọn $\delta > 0$ sao cho

$$\overline{\Omega \cap \{u < -\varepsilon\}} \subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1 + \delta\}.$$

Từ $u \le v < 0$ trên Ω, ta được

$$\overline{\Omega \cap \{v < -\varepsilon\}} \subset \overline{\Omega \cap \{u < -\varepsilon\}} \subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1 + \delta\}.$$

Ta còn phải chứng minh rằng

$$\int\limits_\Omega (-\rho)(dd^c v)^n \le \int\limits_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n,$$

với mỗi $\rho \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. $u = v$ trên $\Omega \cap \{u > -\varepsilon_0\}$ với $\varepsilon_0 > 0$.

Giả sử $\psi \in \mathcal{E}_0(\Omega') \cap \mathcal{C}(\Omega')$. Chọn $\delta_0 > 0$, sao cho

$$\Omega \cap (\{\psi > -2\delta_0\} \cup \{\gamma_\Omega < -1 + 2\delta_0\}) \subset \Omega \cap \{u > -\varepsilon_0\}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$-1 \le u \le v < 0$ và $-1 \le \rho \le 0$ trên Ω.

Đặt

$$f := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\delta_0}, u + \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega \\ -\frac{1}{\delta_0} & \text{trên } \Omega' \backslash \Omega \end{cases},$$

$$g := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\delta_0}, v + \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega \\ -\frac{1}{\delta_0} & \text{trên } \Omega' \setminus \Omega \end{cases}$$

và

$$\varphi := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\delta_0}, \rho + \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega \\ -\frac{1}{\delta_0} & \text{trên } \Omega' \setminus \Omega. \end{cases}$$

Từ Mệnh đề 1.1.7 và Mệnh đề 1.1.8, ta được $f, g, \varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega')$.

Theo Định lí 4.8 trong [22], ta có

$$(dd^c u)^n = (dd^c v)^n \text{ trên } \Omega \cap \{\gamma_\Omega < -1 + 2\delta_0\}.$$

Từ $\rho = \varphi - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega$, $u = f - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega$, $v = g - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega$ trên $\{\gamma_\Omega > -1 + \delta_0\}$ và $f = g$ trên $\{\psi > -2\delta_0\} \cup \{\gamma_\Omega < -1 + 2\delta_0\}$,

tích phân từng phần, ta được

$$\int_\Omega \rho[(dd^c v)^n - (dd^c u)^n] = \int_{\{\gamma_\Omega > -1+\delta_0\}} \rho[(dd^c v)^n - (dd^c u)^n]$$

$$= \int_{\{\gamma_\Omega > -1+\delta_0\}} (\varphi - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega)[(dd^c(g - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^n - (dd^c(f - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^n]$$

$$= \int_{\Omega'} (\varphi - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega)[(dd^c(g - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^n - (dd^c(f - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^n]$$

$$= \int_{\Omega'} (\varphi - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega) dd^c(g - f)$$

$$\wedge [\sum_{j=0}^{n-1} (dd^c(f - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^j \wedge (dd^c(g - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^{n-j-1}]$$

$$= \int_{\Omega'} (g - f) dd^c(\varphi - \frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega)$$

$$\wedge\,[\sum_{j=0}^{n-1}(dd^c(f-\frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^j\wedge(dd^c(g-\frac{1}{\delta_0}\gamma_\Omega))^{n-j-1}]$$

$$=\int\limits_\Omega(v-u)dd^c\rho\wedge[\sum_{j=0}^{n-1}(dd^cu)^j\wedge(dd^cv)^{n-j-1}]\geq 0.$$

Suy ra

$$\int\limits_\Omega(dd^cu)^n=\int\limits_\Omega(dd^cv)^n$$

và

$$\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cv)^n\leq\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cu)^n.$$

Trường hợp 2. Trường hợp tổng quát.

Cố định $\lambda\in(0,1)$ và định nghĩa

$$v_j=\max(u,\lambda v-\frac{1}{j}),\ \text{ở đó } j\in\mathbb{N}^*.$$

Từ $u=v_j$ trên $\{u>-\frac{1}{j}\}$, theo trường hợp 1 và Định lí 4.8 trong [22], ta được

$$\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cu)^n\geq\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cv_j)^n$$
$$\geq\int\limits_{\{u<v_j\}}(-\rho)(dd^cv_j)^n=\lambda^n\int\limits_{\{u<\lambda v-\frac{1}{j}\}}(-\rho)(dd^cv)^n.$$

Suy ra

$$\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cu)^n\geq\sup_{\lambda\in(0,1)}\left[\lambda^n\sup_{j\geq 1}\int\limits_{\{u<\lambda v-\frac{1}{j}\}}(-\rho)(dd^cv)^n\right]$$
$$=\sup_{\lambda\in(0,1)}\left[\lambda^n\int\limits_\Omega(-\rho)(dd^cv)^n\right]$$

$$= \int_{\Omega} (-\rho)(dd^c v)^n.$$

□

3.2 Lớp $\mathcal{F}_p$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới

Trước hết, chúng tôi đưa ra định nghĩa lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω.

Định nghĩa 3.2.1. Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Kí hiệu $\mathcal{F}_p(\Omega)$ là họ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm u xác định trên Ω, sao cho tồn tại một dãy giảm $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ hội tụ điểm tới u trên Ω, thỏa mãn

$$\sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Ví dụ: Hàm $u = 2\left|z\right|^2 - 2$ thuộc lớp $\mathcal{F}_p(\mathbb{B}(O, 1))$.

Chú ý rằng, nếu $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ thì $u \in \mathcal{F}_q(\Omega)$ với mọi $q \in (0, p)$.

Với những khái niệm thích hợp được đưa ra, chúng tôi trình bày một số kết quả, thông qua các mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2.2. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ trên Ω và*

$$\sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Khi đó

$$\int_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n = \sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (dd^c u_j)^n.$$

Hơn nữa, nếu u bị chặn thì

$$\int_\Omega (-v)(dd^c u)^n = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n,$$

với mỗi $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. u bị chặn.

Thứ nhất, ta chỉ ra rằng nếu $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ thì

$$\int_\Omega (-v)(dd^c u)^n = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n. \tag{3.1}$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$-1 \leq u \leq u_j < 0 \text{ trên } \Omega.$$

Giả sử Ω' là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$

và giả sử $\gamma_\Omega \in \mathcal{PSH}^-(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$, sao cho

$$\Omega = \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1\} \text{ và } -\gamma_\Omega \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega).$$

Giả sử $\{\delta_k\}$ là dãy giảm của các số thực dương sao cho $\delta_k \searrow 0$

và
$$\overline{\Omega \cap \{v < -\frac{2}{k}\}} \subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1 + 2\delta_k\} \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Định nghĩa

$$\chi_k := \begin{cases} \max(\min(-kv - 1, \frac{1}{\delta_k}(1+\gamma_\Omega) - 1, 1), 0) & \text{trên } \Omega; \\ 0 & \text{trên } \mathbb{C}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Rõ ràng rằng χ_k là hàm $\mathcal{F}$-liên tục với giá compact trong Ω'.

Cố định $k \geq 1$. Đặt

$$f := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\delta_k}, u + \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega \\ -\frac{1}{\delta_k} & \text{trên } \Omega' \backslash \Omega \end{cases}$$

và

$$f_j := \begin{cases} \max(-\frac{1}{\delta_k}, u_j + \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega) & \text{trên } \Omega \\ -\frac{1}{\delta_k} & \text{trên } \Omega' \backslash \Omega. \end{cases}$$

Theo Mệnh đề 1.1.7 và Mệnh đề 1.1.8, suy ra $f, f_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$.

Từ $u = f - \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega$, $u_j = f_j - \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega$ trên $\{\gamma_\Omega > -1 + \delta_k\}$

và $\{\chi_k \neq 0\} \subset \{\gamma_\Omega > -1 + \delta_k\}$,

thì theo Định lí 3.2 trong [8], ta được

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \chi_k(-v)(dd^c u)^n &= \int\limits_{\Omega'} \chi_k(-v)(dd^c(f - \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega))^n \\ &= \lim_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega'} \chi_k(-v)(dd^c(f_j - \frac{1}{\delta_k}\gamma_\Omega))^n \\ &= \lim_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} \chi_k(-v)(dd^c u_j)^n. \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ $\{\chi_k \neq 1\} \subset \{v \geq -\frac{2}{k}\}$, ta được

$$\limsup_{j \to +\infty} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n \geq \int\limits_{\Omega} \chi_k(-v)(dd^c u)^n$$

$$\geq \liminf_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} (-v)(dd^c u_j)^n - \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} (1 - \chi_k)(-v)(dd^c u_j)^n$$

$$\geq \liminf_{j \to +\infty} \int\limits_{\Omega} (-v)(dd^c u_j)^n - \limsup_{j \to +\infty} \int\limits_{\{v \geq -\frac{2}{k}\}} (-v)(dd^c u_j)^n$$

$$\geq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n - \frac{2}{k} \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (dd^c u_j)^n.$$

Giả sử $k \nearrow +\infty$, và bởi Mệnh đề 3.1.4, ta có được

$$\int_\Omega (-v)(dd^c u)^n = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n.$$

Đây là điều yêu cầu cần chỉ ra.

Bây giờ, cố định $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và định nghĩa $v_k := \max(v, k\rho)$, ở đó $k \in \mathbb{N}^*$. Theo Mệnh đề 3.1.4, suy ra $v_k \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Vì thế, theo (3.1) và Mệnh đề 3.1.4, ta được

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-v)(dd^c u)^n &= \sup_{k\geq 1} \int_\Omega (-v_k)(dd^c u)^n \\ &= \sup_{k\geq 1} \left[\sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-v_k)(dd^c u_j)^n \right] = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-v)(dd^c u_j)^n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Trường hợp 2. Trường hợp tổng quát.

Giả sử $k \in \mathbb{N}^*$. Từ $u_j \leq \max(u_j, -k) < 0$ trên Ω, theo Mệnh đề 3.1.4, ta có $\max(u_j, -k) \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và

$$\begin{aligned}\sup_{j\geq 1} \int_\Omega & [1 + (-\max(u_j, -k))^p](dd^c \max(u_j, -k))^n \\ &\leq (1 + k^p) \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (dd^c u_j)^n < +\infty.\end{aligned}$$

Do đó, $\max(u, -k) \in \mathcal{F}_p(\Omega)$. Vì thế, theo (3.2) và Mệnh đề 3.1.4, ta được

$$\int_\Omega (dd^c \max(u, -k))^n = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (dd^c \max(u_j, -k))^n = \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (dd^c u_j)^n.$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.1.9, ta có

$$-(-u_m)^{\min(p,1)} \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \text{ với mọi } m \geq 1.$$

Vì thế, lần nữa áp dụng Mệnh đề 3.1.4, suy ra

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (-u)^{\min(p,1)}(dd^c \max(u,-k))^n \\
&= \sup_{m\geq 1} \int_\Omega (-u_m)^{\min(p,1)}(dd^c \max(u,-k))^n \\
&= \sup_{m\geq 1} \left[\sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-u_m)^{\min(p,1)}(dd^c \max(u_j,-k))^n\right] \\
&\leq \sup_{m\geq 1} \left[\sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-u_m)^{\min(p,1)}(dd^c u_j)^n\right] \\
&= \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (-u_j)^{\min(p,1)}(dd^c u_j)^n \\
&\leq \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (1+(-u_j)^p)(dd^c u_j)^n.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_{\{u\leq -k\}} (dd^c \max(u,-k))^n \leq \frac{1}{k^{\min(p,1)}} \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (1+(-u_j)^p)(dd^c u_j)^n.$$

Do đó, theo Định lí 4.8 trong [22], ta được

$$\begin{aligned}
\int_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\{u>-k\}} (dd^c \max(u,-k))^n \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega (dd^c \max(u,-k))^n \\
&= \sup_{j\geq 1} \int_\Omega (dd^c u_j)^n.
\end{aligned}$$

$\square$

Mệnh đề 3.2.3. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ với $u \leq v < 0$.*
Khi đó

$$v \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$$

và

$$\int\limits_{\{v>-\infty\}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n.$$

Chứng minh. Giả sử $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho

$$u_j \searrow u \text{ trên } \Omega$$

và

$$\sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} (1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Đặt $v_j := \max(u_j, v)$. Theo Mệnh đề 3.1.4, ta có $v_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.1.9, ta có $-(-v_j)^{\min(p,1)} \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$. Vì thế, lần nữa áp dụng Mệnh đề 3.1.4, suy ra

$$\begin{aligned}
\sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} [1 + (-v_j)^{\min(p,1)}](dd^c v_j)^n \\
&\leq \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} [1 + (-v_j)^{\min(p,1)}](dd^c u_j)^n \\
&\leq \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} [2 + (-u_j)^p](dd^c u_j)^n < +\infty.
\end{aligned}$$

Từ $v_j \searrow v$ trên Ω, suy ra $v \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$. Do đó, theo Mệnh đề 3.1.4

và Mệnh đề 3.2.2, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{v>-\infty\}} (dd^c v)^n &= \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} (dd^c v_j)^n \\ &\leq \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} (dd^c u_j)^n \\ &= \int\limits_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n.\end{aligned}$$

□

Mệnh đề 3.2.4. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ sao cho*

$$(1 + (-u)^p)(dd^c u)^n \leq (1 + (-v)^p)(dd^c v)^n$$

trên $\Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}$.
Khi đó $u \geq v$ trên Ω.

Chứng minh. Giả sử φ là hàm đa điều hòa dưới trơn chặt trên $\mathbb{C}^n$ sao cho $\Omega \subset \{\varphi < 0\}$. Đặt $v_j := \max(u, v + \frac{1}{j}\varphi)$ trên Ω, ở đó $j \in \mathbb{N}^*$.
Trước hết, ta yêu cầu

$$(dd^c v_j)^n \geq (dd^c u)^n \text{ trên } \Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}.$$

Thật vậy, bởi giả thiết

$$(dd^c(v + \frac{1}{j}\varphi))^n \geq (dd^c v)^n \geq \frac{1 + (-u)^p}{1 + (-v)^p}(dd^c u)^n \geq 1_{\{u\leq v+\frac{1}{j}\varphi\}}(dd^c u)^n$$

trên $\Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}$.
Vì thế, theo Mệnh đề 1.2.6, ta được

$$1_{\{u\leq v+\frac{1}{j}\varphi\}}(dd^c v_j)^n \geq 1_{\{u\leq v+\frac{1}{j}\varphi\}}(dd^c u)^n \text{ trên } \Omega\cap\{u > -\infty\}\cap\{v > -\infty\}.$$

Hơn nữa, theo Định lí 4.8 trong [22], ta có

$(dd^c v_j)^n = (dd^c u)^n$ trên $\Omega \cap \{u > v + \frac{1}{j}\varphi\} \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}$.

Do đó

$$(dd^c v_j)^n \geq (dd^c u)^n \text{ trên } \Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}.$$

Điều này đã chứng minh yêu cầu.

Từ $v_j \geq u$ trên Ω, theo Mệnh đề 3.2.3, ta có

$$\int\limits_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n \leq \int\limits_{\{v_j>-\infty\}} (dd^c v_j)^n \leq \int\limits_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n < +\infty.$$

Suy ra $1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c v_j)^n = 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n$ trên Ω.

Do đó, theo Định lí 4.8 trong [22], ta được

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{-\infty<u<v_j\}} (dd^c \varphi)^n &\leq j^n \int\limits_{\{-\infty<u<v_j\}} [(dd^c(v + \frac{1}{j}\varphi))^n - (dd^c v)^n] \\ &\leq j^n \int\limits_{\{-\infty<u<v_j\}} [(dd^c v_j)^n - (dd^c u)^n] = 0.\end{aligned}$$

Vì thế

$$\int\limits_{\{-\infty<u<v\}} (dd^c \varphi)^n = \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\{-\infty<u<v_j\}} (dd^c \varphi)^n = 0.$$

Từ Mệnh đề 1.1.10, ta có $u \geq v$ trên Ω. □

3.3 Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Trong mục này, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lí chính của chương, chỉ ra rằng, mỗi hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới thuộc lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$ có thể xấp xỉ bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi chứa Ω .

Định lí 3.3.1. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn và $\{\Omega_j\}$ là dãy giảm của các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$, với mọi $j \geq 1$. Giả sử tồn tại $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$, $\rho_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j)$ với $\rho_j \nearrow \rho$ h.k.n. trên Ω. Khi đó, với mỗi $p > 0$ và với mỗi $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, tồn tại một dãy tăng của các hàm $u_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j)$ sao cho $u_j \to u$ h.k.n. trên Ω.*

Chứng minh. Giả sử $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $\varphi_j \searrow u$ trên Ω và

$$\sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} (1 + (-\varphi_j)^p)(dd^c\varphi_j)^n < +\infty.$$

Theo Mệnh đề 1.2.7, ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{u>-\infty\}} (1 + (-u)^p)(dd^c u)^n &\leq \sup_{k\geq 1} \int\limits_{\Omega\cap\{u>-\infty\}} (1 + (-\varphi_k)^p)(dd^c u)^n \\
&\leq \sup_{k\geq 1} \left[\liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} (1 + (-\varphi_k)^p)(dd^c\varphi_j)^n \right] \\
&\leq \sup_{j\geq 1} \int\limits_{\Omega} (1 + (-\varphi_j)^p)(dd^c\varphi_j)^n < +\infty.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, từ độ đo $1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}(1 + (-u)^p)(dd^c u)^n$ triệt tiêu trên tất cả các tập con đa cực của Ω_j, thì theo Định lí 4.10 trong [30] tồn tại $u_j \in \mathcal{F}_p(\Omega_j)$, sao cho

$$(1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n = 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}(1 + (-u)^p)(dd^c u)^n \text{ trên } \Omega_j.$$

Theo Định lí 4.8 trong [30], ta có $u_j \geq u_{j+1}$ trên Ω_{j+1}.

Hơn nữa, từ $u \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$, Mệnh đề 3.2.4, suy ra

$$u \geq u_j \text{ trên } \Omega \text{ với mọi } j \geq 1.$$

Giả sử v là chính qui $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên bé nhất của $\lim\limits_{j\to+\infty} u_j$ trên Ω.

Theo Định lí 3.9 trong [20], ta được $u_j \to v$ h.k.n. trên Ω.

Ta yêu cầu $v \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$.

Thật vậy, đặt $v_k := \max(v, k\rho)$, ở đó $k \in \mathbb{N}^*$.

Bởi Mệnh đề 3.1.4, ta có $v_k \in \mathcal{E}_0(\Omega)$.

Từ $\max(u_j, k\rho_j) \nearrow v_k$ h.k.n. trên Ω, thì theo Mệnh đề 1.1.9, Mệnh đề 1.2.7 và Bổ đề 3.3 trong [2], ta được

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} [1 + (-v_k)^{\min(p,1)}](dd^c v_k)^n \\
&\le \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega} [1 + (-v_k)^{\min(p,1)}](dd^c \max(u_j, k\rho_j))^n \\
&\le \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega_j} [1 + (-\max(u_j, k\rho_j))^{\min(p,1)}](dd^c \max(u_j, k\rho_j))^n \\
&\le \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega_j} [1 + (-u_j)^{\min(p,1)}](dd^c u_j)^n \\
&\le 2 \liminf_{j\to+\infty} \int\limits_{\Omega_j} [1 + (-u_j)^p](dd^c u_j)^n \\
&= 2 \int\limits_{\Omega\cap\{u>-\infty\}} (1 + (-u)^p)(dd^c u)^n.
\end{aligned}$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\ge1} \int\limits_{\Omega} [1 + (-v_k)^{\min(p,1)}](dd^c v_k)^n \\
&\le 2 \int\limits_{\Omega\cap\{u>-\infty\}} (1 + (-u)^p)(dd^c u)^n < +\infty.
\end{aligned}$$

Suy ra $v \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$. Điều này đã chứng minh yêu cầu.

Từ $v \geq u_j$ trên Ω, cho nên

$$(1 + (-v)^p)(dd^c u_j)^n \leq (1 + (-u)^p)(dd^c u)^n \text{ trên } \Omega \cap \{u > -\infty\}.$$

Hơn nữa, từ $u_j \nearrow v$ h.k.n. trên Ω, theo Định lí 4.5 trong [21], ta có

$$(1+(-v)^p)(dd^c v)^n \leq (1+(-u)^p)(dd^c u)^n \text{ trên } \Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}.$$

Vì thế, theo Mệnh đề 3.2.4 suy ra $v \geq u$ trên Ω, và do đó, $u = v$ trên Ω.

Vì vậy, $u_j \to u$ h.k.n. trên Ω. $\square$

Kết luận của Chương 3

Trong chương này, bằng cách đưa ra các khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, các mệnh đề, cũng như đã sử dụng toán tử Monge-Ampère phức và các Mệnh đề 1.1.9, Mệnh đề 1.1.10, Mệnh đề 1.2.5, Mệnh đề 1.2.6 Mệnh đề 1.2.7, đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng, mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm xác định trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn.

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Luận án đã chỉ ra các điều kiện để có sự tương đương của tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương và $\mathcal{F}$-cực đại của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và đã chỉ ra các điều kiện để thiết lập vấn đề xấp xỉ của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi các hàm đa điều hòa dưới âm. Cụ thể:

1. Luận án đã chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên Ω thì hàm đó là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω (Định lí 2.1.2).

2. Luận án đã chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *bị chặn* trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω (Định lí 2.2.2).

3. Luận án đã chỉ ra các điều kiện để thiết lập vấn đề xấp xỉ cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn (Định lí 3.3.1).

II. Kiến nghị

Từ những kết quả thu được của Luận án trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

1. Liệu ta có thể định nghĩa được toán tử Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới không bị chặn kiểu như Cegrell?

2. Liệu ta có thể giải được phương trình Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các miền $\mathcal{F}$-mở? Liệu ta có thể nghiên cứu tính chất nghiệm của phương trình đó như: Tính ổn định nghiệm, tính liên tục, liên tục Holder, ...?

3. Nghiên cứu các tính chất về hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới yếu và áp dụng cho bao đa cực.

Danh mục các công trình sử dụng trong Luận án

[1] N. X. Hong, L. M. Hai and H. Viet, *Local maximality for bounded plurifinely plurisubharmonic functions*, Potential Anal., ISSN 0926 - 2601, **48** (2018), 115-123.

[2] N. X. Hong and H. Viet, *Local property of maximal plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **441** (2016), 586–592.

[3] N. V. Trao, H. Viet and N. X. Hong, *Approximation of plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **450** (2017), 1062–1075.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Quang Diệu, Lê Mậu Hải, Cơ sở lí thuyết đa thế vị, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, Hà Nội, (2009).

[2] P. Åhag, U. Cegrell, R. Czyż and P. H. Hiep, *Monge-Ampère measures on pluripolar sets*, J. Math. Pures Appl., **92** (2009), 613–627.

[3] P. Åhag, U. Cegrell and P. H. Hiep, *Monge-Ampère measures on subvarieties*, J. Math. Anal. Appl., **423** (2015), no. 1, 94–105.

[4] P. Åhag, R. Czyż and P. H. Hiep, *Concerning the energy class $\mathcal{E}_p$ for* $0 < p < 1$, Ann. Polon. Math., **91** (2007), 119–130.

[5] B. Avelin, L. Hed and H. Persson, *Approximation of plurisubharmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ., **61** (2016), no. 1, 23–28.

[6] E. Bedford and B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math., **37** (1976), 1–44.

[7] E. Bedford and B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1–40.

[8] E. Bedford and B. A. Taylor, *Fine topology, Silov boundary and* $(dd^c)^n$, J. Funct. Anal., **72** (1987), 225–251.

[9] S. Benelkourchi, *A note on the approximation of plurisubharmonic functions*, C. R. Acad. Sci. Paris, **342** (2006), 647–650.

[10] S. Benelkourchi, *Approximation of weakly singular plurisubharmonic functions*, Int. J. Math., **22** (2011), 937–946.

[11] Z. Błocki, *On the definition of the Monge-Ampère operator in* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann., **328** (2004), 415–423.

[12] Z. Błocki, *The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator*, Amer. J. Math., **128** (2006), 519–530.

[13] Z. Blocki, *A note on maximal plurisubharmonic functions*, Uzbek. Mat. Zh., **no. 1** (2009), 28–32.

[14] H. Cartan, *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), 221-280.

[15] U. Cegrell, *Pluricomplex energy*, Acta Math., **180** (1998), 187–217.

[16] U. Cegrell, *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Inst. Fourier., **54** (2004), 159–179.

[17] U. Cegrell and L. Hed, *Subextension and approximation of negative plurisubharmonic functions*, Michigan Math. J., **56** (2008), no. 3, 593–601.

[18] U. Cegrell, *Maximal plurisubharmonic functions*, Uzbek. Mat. Zh., **no. 1** (2009), 10–16.

[19] M. El Kadiri, *Fonctions finement plurisousharmoniques et topologie plurifine*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **27** (2003), 77–88.

[20] M. El Kadiri, B. Fuglede and J. Wiegerinck, *Plurisubharmonic and holomorphic functions relative to the plurifine topology*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 706–723.

[21] M. El Kadiri and I. M. Smit, *Maximal plurifinely plurisubharmonic functions*, Potential Anal., **41** (2014), 1329–1345.

[22] M. El Kadiri and J. Wiegerinck, *Plurifinely plurisubharmonic functions and the Monge-Ampère operator*, Potential Anal., **41** (2014), 469–485.

[23] S. El Marzguioui, *Fine Aspects of Pluripotential Theory*, FNWI: Korteweg-de Vries Institute for Mathematics (KdVI), (2009).

[24] S. El Marzguioui and J. Wiegerinck, *The plurifine topology is lacally connected*, Potential Anal., **25** (3)(2006), 283–288.

[25] S. El Marzguioui and J. Wiegerinck, *Connectedness in the plurifine topology.* In: Functional Analysis and Complex Analysis, Contemp. Math., Amer. Math. Soc. Providence, RI, **481** (2009), 105–115.

[26] S. El Marzguioui and J. Wiegerinck, *Continuity properties of finely plurisubharmonic functions*, Indiana Univ. Math. J., **59** (5) (2010) 1793–1800.

[27] J. E. Fornæss and J. Wiegerinck, *Approximation of plurisubharmonic functions*, Ark. Math., **27** (1989), 257–272.

[28] B. Fuglede, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, vol. **289** (1972).

[29] B. Fuglede, *Fonctions finement holomorphes de plusieurs variables- un essai*, In: Séminaire d'Analyse P. Lelong. Lelong - P. Dolbeault- H. Skoda, 1983/85, p. 133–135. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, vol **1198** (1986).

[30] L. M. Hai and P. H. Hiep, *Some weighted energy classes of plurisubharmonic functions*, Potential Anal., **34** (1) (2011), 43–56.

[31] L. M. Hai and N. X. Hong, *Maximal q-subharmonicity in* $\mathbb{C}^n$, Vietnam J. Math., **41** (2013), no. 2, 1–10.

[32] L. M. Hai and N. X. Hong, *Maximal q-plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$, Results in Math., **63** (2013), no. 1-2, 63–77.

[33] L. M. Hai, N. V. Trao and N. X. Hong, *The complex Monge-Ampère equation in unbounded hyperconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Elliptic Equ., **59** (2014), no. 12, 1758–1774.

[34] L. Hed, *Approximation of negative plurisubharmonic functions with given boundary values*, Internat. J. Math., **21** (2010), no. 9, 1135–1145.

[35] L. Hed and P. Persson, *Plurisubharmonic approximation and boundary values of plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **413** (2014), no. 2, 700–714.

[36] N. X. Hong, *The locally* $\mathcal{F}$*-approximation property of bounded hyperconvex domains*, J. Math. Anal. Appl., **428** (2015), 1202–1208.

[37] N. X. Hong, *Monge-Ampère measures of maximal subextensions of plurisubharmonic functions with given boundary values*, Complex Var. Elliptic Equ., **60** (3) (2015), 429–435.

[38] N. X. Hong and H. V. Can, *On the approximation of weakly plurifinely plurisubharmonic functions*, to appear in Indag. Math., (2018).

[39] N. X. Hong, L. M. Hai and H. Viet, *Local maximality for bounded plurifinely plurisubharmonic functions*, Potential Anal., ISSN 0926 - 2601, **48** (2018), 115-123.

[40] N. X. Hong and H. Viet, *Local property of maximal plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **441** (2016), 586–592.

[41] N. V. Khue, L. M. Hai and N. X. Hong, *q-subharmonicity and q-convex domains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Slovaca, **63** (2013), no. 6, 1247–1268.

[42] N. V. Khue and P. H. Hiep, *A comparison principle for the complex Monge-Ampère operator in Cegrell's classes and applications*, Trans. Am. Math. Soc., **361**. 10 (2009), 5539–5554.

[43] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, Oxford Science Publications, 1991.

[44] P. Lelong, *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **215** (1942), 398-400.

[45] A. Sadullaev, *A class of maximal plurisubharmonic functions*, Ann. Polon. Math., **106** (2012), 265–274.

[46] N. V. Trao, H. Viet and N. X. Hong, *Approximation of plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **450** (2017), 1062–1075.

[47] J. Wiegerinck, *Plurifine potential theory*, Ann. Polon. Math., **106** (2012), 275-292 .