TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ SÀI GÒN
BAN KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG
TOÁN CAO CẤP C1
(HỆ ĐẠI HỌC)

Biên soạn: TS TRẦN NGỌC HỘI

TP HỒ CHÍ MINH – 2009
LƯU HÀNH NỘI BỘ

Lời nói đầu

Tập bài giảng Toán cao cấp C1 (Hệ đại học) được biên soạn trên cơ sở đề cương môn học của Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn; nhằm đáp ứng yêu cầu nâng cao chất lượng giảng dạy trong giai đoạn nhà trường thực hiện đào tạo theo học chế tín chỉ.

Tập bài giảng này chứa đựng nội dung mà tác giả đã giảng dạy ở Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn và các trường đại học khác. Tác giả bày tỏ lòng cảm ơn đối với các đồng nghiệp ở Ban Khoa học Cơ bản - Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn đã động viên, đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho việc biên soạn.

Tuy vậy, thiếu sót vẫn không thể tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được những nhận xét góp ý của quý đồng nghiệp cho tập bài giảng này và xin chân thành cám ơn.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 09 năm 2009

Tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. HÀM SỐ

1. HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN 5

2. HÀM SỐ SƠ CẤP 9

B. GIỚI HẠN

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT 10

2. HÀM TƯƠNG ĐƯƠNG 12

3. VÔ CÙNG BÉ (VCB) - VÔ CÙNG LỚN 16

4. DẠNG VÔ ĐỊNH 1^{∞} 22

C. LIÊN TỤC

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT 23

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN 25

D - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM 27

2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐẠO HÀM 30

3. VI PHÂN 34

4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO 36

5. QUI TẮC L'HOSPITAL 38

6. KHAI TRIỂN TAYLOR 43

7. ỨNG DỤNG 47

BÀI TẬP 53

CHƯƠNG 2. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A - TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH 59

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN 61
3. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ 67
4. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC 71
5. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ 73

B -TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH - TÍCH PHÂN SUY RỘNG

1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH 78
2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG 84
3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN 88
4. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 90

BÀI TẬP 95

CHƯƠNG 3. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1. KHÁI NIỆM VỀ HÀM NHIỀU BIẾN 99
2. ĐẠO HÀM RIÊNG 102
3. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM HỢP 104
4. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM ẨN 105
5. VI PHÂN 107
6. CỰC TRỊ 109
7. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN 110
8. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 113
9. MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ 115

BÀI TẬP 118

CHƯƠNG 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. HÀM SỐ

1. HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

1.1. Hàm lũy thừa $y = x^{\alpha}$ (α : Const)

Miền xác định D của hàm số $y = x^{\alpha}$ phụ thuộc vào α. Trường hợp α là số vô tỉ, ta có $D = [0; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$; $D = (0; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$.

1.2. Hàm số mũ: $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$: Const)

Hàm số $y = a^x$ có miền xác định D = **R**, miền giá trị là $(0; +\infty)$.

1.3. Hàm số logarit: $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$: Const)

Hàm số $y = \log_a x$ có miền xác định $D = (0; +\infty)$, miền giá trị là **R**. Nhắc lại một số công thức:

Với $0 < a, b \neq 1$; $x, x_1, x_2 > 0$ và $y, \alpha \in R$, ta có:

1) $\begin{cases} y = \log_a x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = a^y$. Đặc biệt, $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$.

2) $a^{\log_a x} = x$.

3) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$.

4) $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$.

Đặc biệt, $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$.

5) $\log_a(x^{\alpha}) = \alpha \log_a(x)$.

6) $\log_{a^{\alpha}}(x) = \frac{1}{\alpha}\log_a(x)$ $(\alpha \neq 0)$.

7) $\log_a x = \log_a b . \log_b x$;

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

8) $\ln x = \log_e x$: Logarit Nêpe của x.

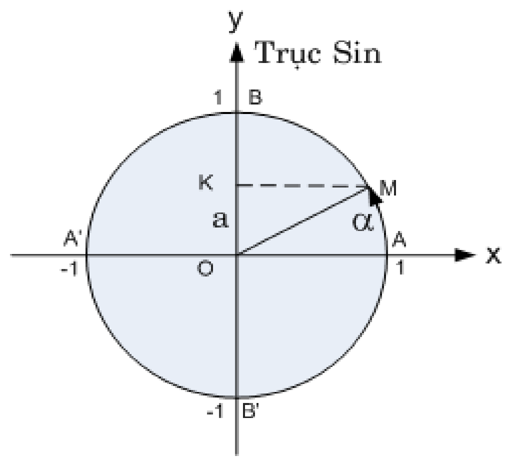
$\lg x = \log_{10} x$: Logarit thập phân của x.

Ví dụ: Tính $A = \log_{13} 25$.

Giải: $A = \log_{13} 25 = \frac{\ln 25}{\ln 13} \approx 1,254947126$.

1.4. Hàm số lượng giác và hàm ngược

1.4.1. Hàm y = sinx và y =arcsinx:



Với $-1 \le a \le 1$, ta định nghĩa:

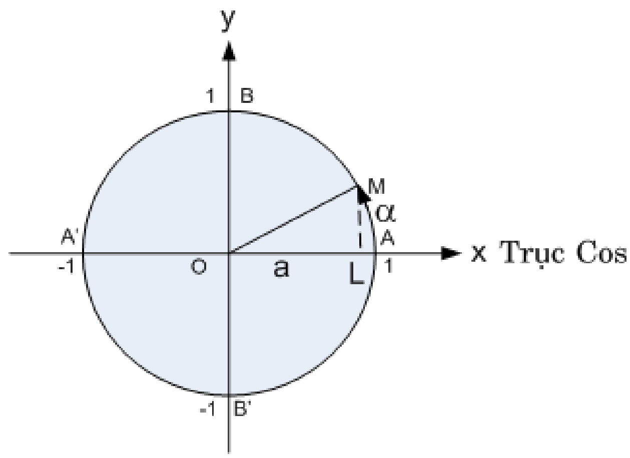
$$\boxed{\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Khi đó arcsina ($-1 \le a \le 1$) được xác định duy nhất. Như vậy, y= arcsinx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: $D = [-1;1]$.
- Miền giá trị: $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$.
- $\forall\alpha \in [-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}], \forall a \in [-1;1]; \sin\alpha = a \Leftrightarrow \arcsin a = \alpha.$
- y = arcsinx là hàm số lẻ, nghĩa là arcsin(−x) = – arcsinx.

Ví dụ: arcsin(1/2) = π/6; arcsin($-\sqrt{3}/2$) = – arcsin($\sqrt{3}/2$) = −π/3; arcsin(−1/2) = π/6; arcsin(−3/4) = – arcsin(3/4) ≈ – 0,848062079; arcsin(−4) không tồn tại.

1.4.2. Hàm y = cosx và y =arccosx:



Với $-1 \le a \le 1$, ta định nghĩa:

$$\boxed{\arccos a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a; \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}}$$

Khi đó arccosa ($-1 \le a \le 1$) được xác định duy nhất. Như vậy, y= arccosx là hàm số có tính chất sau:

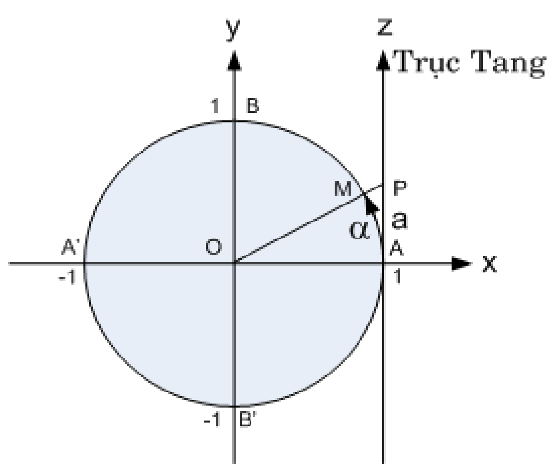
- Miền xác định: D = [−1;1].
- Miền giá trị: $[0;\pi]$.
- $\forall\alpha \in [0;\pi], \forall a \in [-1;1]; \cos\alpha = a \Leftrightarrow \arccos a = \alpha.$
- arccos(− x) = π − arccosx.

Ví dụ: arccos(1/2) = π/3; arccos($-\sqrt{3}/2$) = π − arccos($\sqrt{3}/2$) = π − π/6 = 5π/6;

arccos($-\sqrt{2}/2$) = π − arccos($\sqrt{2}/2$)= 3π/4; arccos(−3/4) = π - arccos(3/4)≈ 2,418858406;

arccos(− 4) không tồn tại.

1.4.3. Hàm y = tgx và y =arctgx:



Với a ∈ **R**, ta định nghĩa:

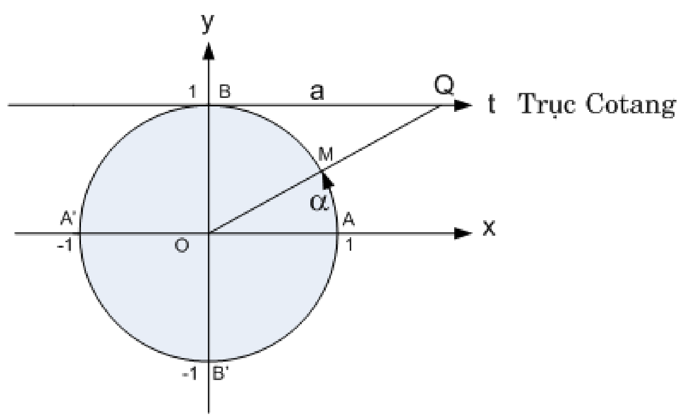
$$\boxed{\operatorname{arc}\operatorname{tg}a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Khi đó arctga được xác định duy nhất. Như vậy, y= arctgx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: D = **R**.
- Miền giá trị: $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.
- $\forall\alpha \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), \forall a \in \mathbb{R}, \operatorname{tg}\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{arctg}a = \alpha.$
- y = arctgx là hàm số lẻ, nghĩa là arctg(–x) = – arctgx.

Ví dụ: arctg1 = π/4; arctg($-\sqrt{3}$/3) = – arctg($\sqrt{3}$/3) = – π/6; arctg(–1)= –π/4; arctg(3/4) ≈ 0,643501108; arctg(– 4) ≈ –1,3258.

1.4.4. Hàm y = cotgx và y =arccotgx:



Với a ∈ **R**, ta định nghĩa:

$$\boxed{\operatorname{arc}\operatorname{cotg}a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{cotg}\alpha = a; \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}}$$

Khi đó arccotga được xác định duy nhất. Như vậy, y= arccotgx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: D = **R**.
- Miền giá trị: $(0;\pi)$.
- $\forall\alpha \in (0;\pi), \forall a \in \mathbb{R}, \cot g\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{arc}\cot g a = \alpha.$
- arccotg(–x) = π – arccotgx.

Ví dụ: arccotg1 = π/4; arccotg($-\sqrt{3}$/3) = π – arccotg($\sqrt{3}$/3) = π – π/3 = 2π/3;

$\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arccotg}(\sqrt{3}) = \pi - \pi/6 = 5\pi/6;$

$\operatorname{arccotg}(3/4) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(3/4) \approx 0,927295218$

$\operatorname{arccotg}(-4) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(-4) \approx \pi/2 + \operatorname{arctg}4 \approx 2,89661399.$

trong đó ta đã sử dụng tính chất sau:

1.4.5. Tính chất:

1) Với mọi $-1 \le x \le 1$, $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

2) Với mọi x, $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arccotg}x = \pi/2$.

2. HÀM SỐ SƠ CẤP

Hàm số sơ cấp là hàm số được xây dựng từ các hàm hằng và các hàm số sơ cấp cơ bản qua các phép toán đại số: cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp nối ánh xạ.

Ví dụ: $y = \ln(1 + \sqrt{2x})$ là một hàm số sơ cấp.

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin 6x}{x} & \text{nếu } x < 0; \\ \cos 3x & \text{nếu } x \ge 0. \end{cases}$$ không là hàm số sơ cấp.

B. GIỚI HẠN

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. Định nghĩa. 1) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0 (có thể loại trừ x_0). Ta nói f(x) có giới hạn là $L\in R$ khi x tiến về x_0, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0.

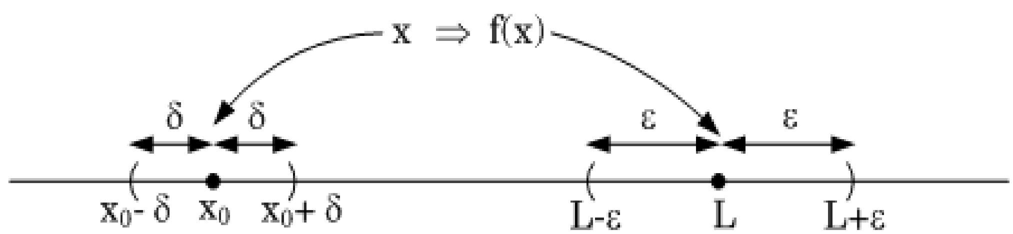
Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x \neq x_0 < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Minh họa:



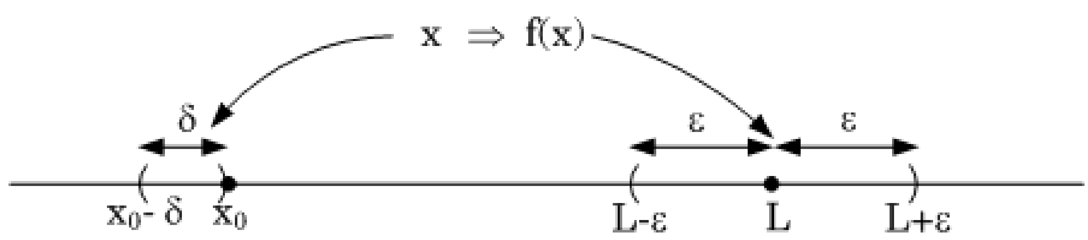
2) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng có dạng $(a;x_0)$. Ta nói f(x) có giới hạn là $L\in R$ khi x tiến về x_0 bên trái, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0 về phía bên trái.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Minh họa:



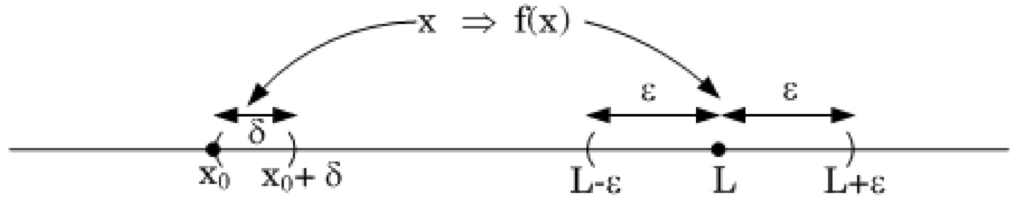
3) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng có dạng $(x_0;b)$. Ta nói f(x) có giới hạn là $L\in R$ khi x tiến về x_0 bên phải, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0 về phía bên phải.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow | f(x) - L |< \varepsilon$$

Minh họa:



Như vậy, từ các định nghĩa trên ta suy ra;

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L; \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L. \end{cases}$$

4) Tương tự, ta định nghĩa được các giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty; \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty; \ldots .$$

1.2. Định lý. Cho các hàm số f(x), g(x) khi $x\to x_0$. Khi đó, với a, b $\in$R, ta có:

1) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ thì :

$f(x) + g(x) \to a + b;$

$f(x) - g(x) \to a - b;$

$f(x)g(x) \to ab;$

$f(x)/g(x) \to a/b$ (nếu $b \neq 0$).

2) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x) + g(x) \to \infty$.
3) Nếu $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x) + g(x) \to +\infty$.
4) Nếu $f(x) \to a \neq 0$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x)g(x) \to \infty$.
5) Nếu $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x)g(x) \to \infty$.
6) Nếu $f(x) \to a \neq 0$, $g(x) \to 0$ thì $f(x)/g(x) \to \infty$.
7) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)/g(x) \to 0$.
8) Nếu $f(x) \to \infty$, $g(x) \to b$ thì $f(x)/g(x) \to \infty$.
9) Nếu $f(x) \to a > 1$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)^{g(x)} \to +\infty$.
   Nếu $f(x) \to a$ với $0 < a < 1$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)^{g(x)} \to 0$.
10) Nếu $f(x) \to a$ thì $|f(x)| \to |a|$.
11) $f(x) \to 0 \Leftrightarrow |f(x)| \to 0$.
12) (Giới hạn kẹp) Giả sử $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x$ khá gần x_0 và $f(x) \to a$; $g(x) \to a$. Khi đó $h(x) \to a$.

1.3. Định lý. Cho f(x) là một hàm số sơ cấp xác định tại x_0. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ví dụ: 1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{\sin x} = \frac{1-\cos\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = 2.$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 2x}{\sin x} = \infty$ (vì $\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x) = 1+\cos 0 = 2$ và $\lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$)

1.4. Các dạng vô định trong giới hạn:

Có tất cả 7 dạng vô định trong giới hạn, đó là:

$$\infty - \infty;\ 0\infty;\ \frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 1^{\infty};\ 0^0;\ \infty^0.$$

1) Dạng $\infty - \infty$: Khi f(x) $\to +\infty\ (-\infty)$ và g(x) $\to +\infty\ (-\infty)$ thì ta nói lim (f(x) – g(x)) có dạng vô định $\infty - \infty$.
2) Dạng 0∞: Khi f(x) $\to 0$ và g(x)$\to\infty$ thì ta nói lim f(x)g(x) có dạng vô định 0∞ (Lưu ý : f(x) $\to 0$ không có nghĩa là f(x) $\equiv 0$).
3) Tương tự cho 5 dạng còn lại.

Ta nói các dạng trên là các dạng vô dịnh vì không có qui tắc chung để xác định giá trị của giới hạn nếu chỉ dựa vào các giới hạn thành phần.

Để tính các giới hạn có dạng vô định, ta cần biến đổi để làm mất đi dạng vô định, gọi là khử dạng vô định.

2. HÀM TƯƠNG ĐƯƠNG

2.1. Định nghĩa. Cho các hàm số f(x), g(x) xác định và không triệt tiêu trên một khoảng chứa x_0 (có thể loại trừ x_0). Ta nói f(x) tương đương với g(x) khi x $\to x_0$, ký hiệu f(x)~ g(x) khi x $\to x_0$, nếu $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Như vậy,

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ (f(x), g(x) \neq 0) \end{array}}$$

Các tính chất sau được thỏa:

1) f(x) ~ f(x).
2) f(x) ~ g(x) $\Rightarrow$ g(x) ~ f(x).

3) $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x)$.

2.2. Định lý. 1) Nếu $f(x) \to L \in R$, $L \neq 0$, thì $f(x) \sim L$.

2) Nếu $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to A$ thì $f(x) \to A$.

3) Nếu $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases}$ thì $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x); \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}. \end{cases}$

4) Nếu $f(x) \sim g(x)$ thì $\sqrt[n]{f(x)} \sim \sqrt[n]{g(x)}$ (giả sử các căn có nghĩa).

Chú ý:

- Ta không thể viết $f(x) \sim 0$ hay $f(x) \sim \infty$ (ngay cả khi $f(x) \to 0$ hay $f(x) \to \infty$) vì điều này vô nghĩa!
- $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases} \not\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) + f_2(x) \sim g_1(x) + g_2(x); \\ f_1(x) - f_2(x) \sim g_1(x) - g_2(x). \end{array} \right.$

Chứng minh: 1) Nếu $f(x) \to L \in R$, $L \neq 0$, thì $\lim \dfrac{f(x)}{L} = 1$ nên $f(x) \sim L$ (ở đây L được xem như hàm hằng).

2) Nếu $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to A$ thì $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} g(x) \to 1.A = A$.

3) Giả sử $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases}$ Khi đó

$$\lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1.$$

từ đó

$$\lim \frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} . \lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1.1 = 1;$$
$$\lim \frac{f_1(x)/f_2(x)}{g_1(x)/g_2(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} / \lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1/1 = 1.$$

Suy ra $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x); \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}. \end{cases}$

4) Giả sử $f(x) \sim g(x)$. Khi đó

$$\lim \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{\sqrt[n]{g(x)}} = \lim \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} = \sqrt[n]{1} = 1.$$

Suy ra $\sqrt[n]{f(x)} \sim \sqrt[n]{g(x)}$.

2.3.Một số giới hạn và tương đương cơ bản:

GIỚI HẠN	TƯƠNG ĐƯƠNG
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (x: rad)	sinx ~ x khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (x: rad)	$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ (x: rad)	tgx ~ x khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	arcsinx ~ x khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$	arctgx ~ x khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$e^x-1\sim x$ khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	ln(1+ x) ~ x khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$ khi $x\to 0$ $(\alpha\neq 0)$
• $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$ • $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}tgx=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}tgx=-\infty.$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}arctgx=\dfrac{\pi}{2};\quad \lim\limits_{x\to-\infty}arctgx=-\dfrac{\pi}{2}.$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$	• Khi $x\to\infty$: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_mx^m\sim a_mx^m$ • Khi $x\to 0$: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_mx^m\sim a_mx^m$ $(m<n;\ a_n\neq 0;\ a_m\neq 0)$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

a) $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x}$; b) $L_2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})}$;

c) $L_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1}$.

Giải. a) $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x}$. Khi $x\to 0$ ta có

$$\ln\cos 2x=\ln[1+(\cos 2x-1)]\sim \cos 2x-1\sim-(1/2)(2x)^2=-2x^2 \qquad (1)$$

$x^2 + 3x \sim 3x$ (2)

$\sin x \sim x$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra: $(x^2 + 3x)\sin x \sim 3x.x = 3x^2$ (4)

Từ (1) và (4) ta suy ra:

$$\frac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x} \sim \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Do đó $L_1 = -\dfrac{2}{3}$.

b) $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})}$. Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t+1$. Khi $x\to 1$ ta có $t \to 0$. Do đó

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})} = \lim_{t\to 0}\frac{(t^2-3t)\arcsin(t^2+t)}{e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t})}.$$

Khi $t\to 0$ ta có:

$t^2 - 3t \sim -3t,$ (1)

$\arcsin(t^2 + t) \sim t^2 + t \sim t.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$(t^2 - 3t)\arcsin(t^2 + t) \sim -3t.t \sim -3t^2.$ (3)

Mặt khác,

$e^t - 1 \sim t$ (4)

$1-\sqrt{1+4t} = 1-(1+4t)^{\frac{1}{2}} \sim -\dfrac{1}{2}(4t) = -2t$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t}) \sim et(-2t) = -2et^2$ (6)

Từ (3) và (6) ta suy ra:

$$\frac{(t^2-3t)\arcsin(t^2+t)}{e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t})} \sim \frac{-3t^2}{-2et^2} \to \frac{3}{2e}.$$

Do đó $L_2 = \dfrac{3}{2e}$.

c) $L_3 = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1}$. Khi $x\to\infty$ ta có

$3x^8 - 5x^6 + 4x + 2 \sim 3x^8$

$x^8 - 5x^7 + 14x^4 + 1 \sim x^8$

Suy ra $\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1} \sim \dfrac{3x^8}{x^8} \to 3.$ Do đó $L_3 = 3.$

3. VÔ CÙNG BÉ (VCB)-VÔ CÙNG LỚN

3.1. VÔ CÙNG BÉ (VCB)

1) Định nghĩa. Ta nói f(x) là một VCB khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

2) So sánh hai VCB: Cho f(x) và g(x) là VCB khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

a) Nếu $L = 0$ thì ta nói VCB f(x) có cấp cao hơn VCB g(x).

b) Nếu $L = \infty$ thì ta nói VCB f(x) có cấp thấp hơn VCB g(x).

c) Nếu $0 < |L| < +\infty$ thì ta nói hai VCB f(x) và g(x) có cùng cấp.

3) Bậc của VCB khi $x \to 0$: Cho f(x) là một VCB khi $x \to 0$. Ta nói VCB f(x) có cấp α khi chọn x làm VCB chính nếu:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \text{ khi } x \to 0$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha > 0$.

Nhận xét: Các định nghĩa trong 2) và 3) tương thích nhau khi ta so sánh hai VCB khi $x \to 0$.

Ví dụ: Khi $x \to 0$, $1 - \cos 4x$ là một VCB cấp 2 vì

$$1 - \cos 4x \sim \frac{1}{2}(4x)^2 = 8x^2.$$ vaø coù cuøng caáp thaáp cao hôn

4) Tổng (hiệu) hai VCB: Cho f(x), g(x) là hai VCB khi $x \to x_0$.

a) Nếu f(x) và g(x) không có cùng cấp thì

$$f(x) + g(x) \sim \begin{cases} f(x) & \text{nếu f(x) có cấp thấp hơn g(x);} \\ g(x) & \text{nếu f(x) có cấp cao hơn g(x).} \end{cases}$$

b) Nếu f(x) và g(x) có cùng cấp nhưng không tương đương thì f(x) – g(x) là VCB có cùng cấp với VCB f(x), hơn nữa

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x). \qquad (*)$$

Đặc biệt, cho f(x), g(x) là hai VCB khi $x \to 0$ có cấp lần lượt là α, β:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \quad (a \neq 0);$$

$$g(x) \sim bx^{\beta} \quad (b \neq 0).$$

Khi đó

$$f(x) - g(x) \sim \begin{cases} ax^{\alpha} & \text{nếu } \alpha < \beta; \\ -bx^{\beta} & \text{nếu } \alpha > \beta; \\ (a-b)x^{\alpha} & \text{nếu } \alpha = \beta;\ a - b \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý: Trường hợp hai VCB f(x) và g(x) tương đương và $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì f(x) – g(x) là VCB có cấp lớn hơn VCB f(x) nhưng (*) không còn đúng.

5) Qui tắc giữ lại VCB cấp bé nhất (Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao): Giả sử khi $x \to x_0$, VCB f(x) được phân tích thành tổng của nhiều VCB, trong đó chỉ có một VCB cấp thấp nhất là $f_0(x)$. Khi đó:

$$f(x) \sim f_0(x) \text{ khi } x \to 0.$$

Chú ý: Trường hợp có nhiều VCB cấp bé nhất trong phân tích của f(x) thì ta gộp các VCB đó lại, xem như là một VCB và dùng tính chất 4b) ở trên để khảo sát cấp của VCB đó, sau đó mới có thể áp dụng qui tắc trên.

3.2. VÔ CÙNG LỚN (VCL)

1) Định nghĩa: Ta nói f(x) là một VCL khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

2) So sánh hai VCL: Cho f(x) và g(x) là VCL khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

a) Nếu $L = 0$ thì ta nói VCL f(x) có cấp thấp hơn VCL g(x).

b) Nếu $L = \infty$ thì ta nói VCL f(x) có cấp cao hơn VCL g(x).

c) Nếu $0 < |L| < +\infty$ thì ta nói hai VCL f(x) và g(x) có cùng cấp.

3) Bậc của VCL khi x → ∞: Cho f(x) là một VCL khi $x \to \infty$. Ta nói VCL f(x) có cấp α khi chọn x làm VCL chính nếu:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \text{ khi } x \to \infty$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha > 0$.

Nhận xét: Các định nghĩa trong 2) và 3) tương thích nhau khi ta so sánh hai VCL khi $x \to \infty$.

Ví dụ: Khi $x \to \infty$, $2x^3 - 9x^2 + 5x + 19$ VCL cấp 3 vì

$$2x^3 - 9x^2 + 5x + 19 \sim 2x^3.$$

4) Tổng (hiệu) hai VCL: Cho f(x), g(x) là hai VCL khi $x \to x_0$.

a) Nếu f(x) và g(x) không có cùng cấp thì

$$f(x) + g(x) \sim \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp cao hơn } g(x); \\ g(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp thấp hơn } g(x). \end{cases}$$

b) Nếu f(x) và g(x) có cùng cấp nhưng không tương đương thì f(x) – g(x) là VCL có cùng cấp với VCL f(x), hơn nữa

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x). \qquad (*)$$

Đặc biệt, cho f(x), g(x) là hai VCL khi $x \to \infty$ có cấp lần lượt là α, β:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \ (a \neq 0);$$

$$g(x) \sim bx^{\beta} \ (b \neq 0).$$

Khi đó

$$f(x) - g(x) \sim \begin{cases} ax^{\alpha} & \text{nếu } \alpha > \beta; \\ -bx^{\beta} & \text{nếu } \alpha < \beta; \\ (a-b)x^{\alpha} & \text{nếu } \alpha = \beta;\ a - b \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý: Trường hợp hai VCL f(x) và g(x) tương đương và $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì f(x) – g(x) có thể không là VCL hoặc là VCL có cấp nhỏ hơn VCL f(x) nhưng (*) không còn đúng.

5) Qui tắc giữ lại VCL cấp cao nhất (Qui tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp): Giả sử khi $x \to x_0$, VCL f(x) được phân tích thành tổng của nhiều VCL, trong đó chỉ có một VCL cấp cao nhất là $f_n(x)$. Khi đó

$$f(x) \sim f_n(x) \text{ khi } x \to x_0.$$

Chú ý: Trường hợp có nhiều VCL cấp cao nhất trong phân tích của f(x) thì ta gộp các VCL đó lại, xem như là một đại lượng (có thể là VCL nhưng cũng có thể không), và dùng tính chất 4b) ở trên để khảo sát đại lượng này, sau đó mới có thể áp dụng qui tắc trên.

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{3x^2 + 4x - 1})$$

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{3x^2 + 4x - 1})$$

$$L_3 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{2x^2 + 4x - 1})$$

$$L_4 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + 3x + 2})$$

$$L_5 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 + 1} + \sqrt[3]{10 + 3x^2 - 2x^3})$$

$$L_6 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2})$$

$$L_7 = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) - x^2}{\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x}$$

$$L_8 = \lim_{x\to2}\frac{(x^2 - 6x + 8)\operatorname{arc\,tg}(x^3 - 8) + 2\ln(x^2 - 4x + 5) + (x-2)^3}{(e^x - e^2)(2 - \sqrt{x+2}) + 2x^2 - 8x + 9 - e^{(x-2)^4}}$$

Giải.

- $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1})$

Khi $x\to +\infty$ ta có:

$A := \sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3}.$ (1)

$B := \sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \sim |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3}$ (2)

(Như vậy, theo trên ta có A – B không là VCL hoặc là VCL cấp nhỏ hơn 1, nhưng chưa xác định được cấp chính xác là bao nhiêu).

Ta biến đổi: $A - B = \dfrac{A^2 - B^2}{A + B}$. Khi $x\to +\infty$ ta có

$A^3 - B^3 = (3x^2 - 4x + 2) - (3x^2 + 4x - 1) = -8x + 3 \sim -8x$ (3)

$A + B = 2x\sqrt{3}$ (do (1) và (2)) (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$A - B = -\frac{8x}{2x\sqrt{3}} \to -\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{khi } x\to +\infty$$

Vậy $L_1 = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

- $L_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1})$

Lý luận tương tự khi tính L_1 và chú ý rằng khi $x\to -\infty$ ta có

$\sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3} = -x\sqrt{3}.$

$\sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \sim |x|\sqrt{3} = -x\sqrt{3}$

Từ đó, ta tính được $L_2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

- $L_3 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{2x^2+4x-1})$

Khi $x\to \infty$ ta có

$A := \sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3}.$ $B := \sqrt{2x^2+4x-1} \sim \sqrt{2x^2} \sim |x|\sqrt{2}.$

Suy ra $A - B \sim |x|(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \to +\infty$ khi $x \to \infty$. Vậy $L_3 = +\infty$.

- $L_4 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3+2x^2-3x+1}-\sqrt[3]{2x^3+3x+2})$

Khi $x\to \infty$ ta có

$A := \sqrt[3]{2x^3+2x^2-3x+1} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}.$ (1)

$B := \sqrt[3]{2x^3+3x+2} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}.$ (2)

(Như vậy, theo trên ta có A – B không là VCL hoặc là VCL cấp nhỏ hơn 1, nhưng chưa xác định được cấp chính xác là bao nhiêu).

Ta biến đổi: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$. Khi $x \to \infty$ ta có

$A^3 - B^3 = (2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) - (2x^3 + 3x + 2) = 2x^2 - 6x - 1 \sim 2x^2$ (3)

$A^2 \sim x^2\sqrt[3]{4}$; $AB \sim x^2\sqrt[3]{4}$; $B^2 \sim x^2\sqrt[3]{4}$. Suy ra $A^2 + AB + B^2 \sim 3x^2\sqrt[3]{4}$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$A - B \sim \frac{2x^2}{3x^2\sqrt[3]{4}} \to \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \quad \text{khi } x \to \infty.$$

Vậy $L_4 = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

- $L_5 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 + 1} + \sqrt[3]{10 + 3x^2 - 2x^3})$

Lý luận tương tự khi tính L_4 và sử dụng công thức:

$$A + B = \frac{A^3 + B^3}{A^2 - AB + B^2},$$

từ đó ta tính được $L_5 = 2\sqrt[3]{2}$.

- $L_6 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2})$

Khi $x \to \infty$ ta có:

$A := \sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}$.

$B := \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} \sim \sqrt[3]{x^3} = x$.

Suy ra $A - B \sim x(\sqrt[3]{2} - 1) \to \infty$ khi $x \to \infty$.

Vậy $L_6 = \infty$.

- $L_7 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) - x^2}{\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x}$

Khi $x \to 0$ ta có:

* $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) \sim x^2 + 4x \sim 4x$,

$\ln(1 + 3\operatorname{tg}x) \sim 3\operatorname{tg}x \sim 3x$.

Suy ra $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) \sim 7x$

Từ đó $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) - x^2 \sim 7x$ (1)

* $\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x = \operatorname{arctg}(4x) + (\cos 2x - 1) - (e^x - 1)$

$$\begin{cases} \text{arctg}(4x) \sim 4x \\ e^x - 1 \sim x \end{cases} \Rightarrow \text{arctg}(4x) - (e^x - 1) \sim 3x;$$

$\cos 2x - 1 \sim -(1/2)(2x)^2 = -2x^2$

Suy ra $\text{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x \sim 3x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{\arcsin(x^2+4x)+\ln(1+3\text{tg}x)-x^2}{\text{arctg}(4x)+\cos 2x - e^x} \sim \frac{7x}{3x} \to \frac{7}{3} \quad \text{khi} \quad x \to 0.$$

Vậy $L_7 = \dfrac{7}{3}$.

- $$L_8 = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-6x+8)\,\text{arctg}(x^3-8)+2\ln(x^2-4x+5)+(x-2)^3}{(e^x-e^2)(2-\sqrt{x+2})+2x^2-8x+9-e^{(x-2)^4}}$$

Đặt $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t+2$. Khi $x \to 2$ ta có $t \to 0$. Do đó

$$L_8 = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-6x+8)\,\text{arctg}(x^3-8)+2\ln(x^2-4x+5)+(x-2)^3}{(e^x-e^2)(2-\sqrt{x+2})+2x^2-8x+9-e^{(x-2)^4}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2-2t)\,\text{arctg}(t^3+6t^2+12t)+2\ln(1+t^2)+t^3}{e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4})+2t^2+1-e^{t^4}}$$

Khi $t\to 0$ ta có

* $(t^2 - 2t)\text{arctg}(t^3 + 6t^2 + 12t) \sim -2t(t^3 + 6t^2 + 12t) \sim -24t^2$.

$2\ln(1+ t^2) \sim 2t^2$

Suy ra $(t^2 - 2t)\text{arctg}(t^3 + 6t^2 + 12t) + 2\ln(1+ t^2) \sim -22t^2$

Từ đó $(t^2 - 2t)\text{arctg}(t^3+6t^2+12t)+2\ln(1+ t^2) + t^3 \sim -22t^2$ (1)

* $$e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) = e^2(e^t-1)\frac{-t}{2+\sqrt{t+4})} \sim -e^2 t\frac{t}{4} = -\frac{e^2}{4}t^2$$

Suy ra $e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4})+2t^2 \sim (2-\dfrac{e^2}{4})t^2$

Mà $1-e^{t^4} \sim -t^4$ nên

$$e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4})+2t^2+1-e^{t^4} \sim (2-\frac{e^2}{4})t^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{(t^2-2t)\,\text{arctg}(t^3+6t^2+12t)+2\ln(1+t^2)+t^3}{e(e^t-1)(2-\sqrt{t+4})+2t^2+1-e^{t^4}} \sim \frac{-22t^2}{(2-\frac{e^2}{4})t^2} \to \frac{88}{e^2-8}.$$

Vậy $L_8 = \dfrac{88}{e^2-8}$.

4. DẠNG VÔ ĐỊNH 1^{∞}

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định 1^{∞}, nghĩa là khi $x\to a$ ta có $f(x)\to 1$ và $g(x)\to\infty$. Đặt $u = f(x) - 1$. Ta có $u\to 0$. Suy ra

$$f(x)^{g(x)} = (1+u)^{g(x)} = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{ug(x)} = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{[f(x)-1]g(x)}$$

Mà $(1+u)^{\frac{1}{u}} \to e$ khi $u \to 0$ nên

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}}$$

Chú ý: Công thức trên chỉ được dùng cho giới hạn có dạng vô định 1^{∞}.

Ví dụ. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\cot g^2 x}$.

Giải. Dễ thấy L có dạng vô định 1^{∞}. Áp dụng công thức cho giới hạn dạng vô định 1^{∞}, ta có

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x - 1)\cot g^2 x}$$

Xét $L' = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x - 1)\cot g^2 x$. Khi $x\to 0$ ta có

$$(\cos 3x - 1)\cot g^2 x = \frac{\cos 3x - 1}{tg^2 x} \sim \frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} \to -\frac{9}{2}$$

Do đó $L' = -\dfrac{9}{2}$. Suy ra $L = e^{-\frac{9}{2}}$.

C. LIÊN TỤC

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. **Định nghĩa**.

1) Hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0 được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Hàm số f(x) xác định trên nửa khoảng (a; x_0] được gọi là liên tục bên trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

3) Hàm số f(x) xác định trên nửa khoảng [x_0; b) được gọi là liên tục bên phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Từ các định nghĩa trên, ta thấy

$$\text{f(x) liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục bên trái tại } x_0; \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại } x_0. \end{cases}$$

4) f(x) liên tục trên (a; b) $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại mọi $x_0 \in$ (a; b).

$$\text{f(x) liên tục trên [a; b)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại a.} \end{cases}$$

$$\text{f(x) liên tục trên (a; b]} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên trái tại b.} \end{cases}$$

$$\text{f(x) liên tục trên [a; b]} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại a;} \\ \text{f(x) liên tục bên trái tại b.} \end{cases}$$

1.2. Định lý. Nếu f(x) là một hàm số sơ cấp xác định trên D thì f(x) liên tục trên D.

Ví dụ: Định các tham số a, b để hàm số sau liên tục trên R:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2} & \text{nếu } x < 0; \\ ax + b & \text{nếu } 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Giải.

- Trên $(-\infty; 0)$, y trùng với hàm $f(x) = \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$. Vì f(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x \neq 0$, nên y liên tục trên $(-\infty; 0)$.

- Trên (0; 1), y trùng với hàm g(x) = ax + b. Vì g(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x \in R$, nên y liên tục trên (0; 1).
- Trên (1; +∞), y trùng với hàm $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$. Vì h(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x > 0, x \neq 1$, nên y liên tục trên (1; +∞).

Suy ra

$$\text{y liên tục trên R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục tại } x = 0; \\ \text{y liên tục tại } x = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\bullet\ \text{y liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục bên trái tại } x = 0; \\ \text{y liên tục bên phải tại } x = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} y = y(0); \\ \lim\limits_{x \to 0^+} y = y(0). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2} = b; \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax+b) = b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = b$$

$$\Leftrightarrow b = 18 \qquad (2)$$

$$\bullet\ \text{y liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục bên trái tại } x = 1; \\ \text{y liên tục bên phải tại } x = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = y(1); \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = y(1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a+b; \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} = a+b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} = a+b$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1 + t)}{t(t + 4)} = a+b \qquad (t = x-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{4t} = a+b$$

$$\Leftrightarrow a+b = \frac{1}{4} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\text{y liên tục trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{4}; \\ b = 18. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{71}{4}; \\ b = 18. \end{cases}$$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN

2.1. Định lý. Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Khi đó

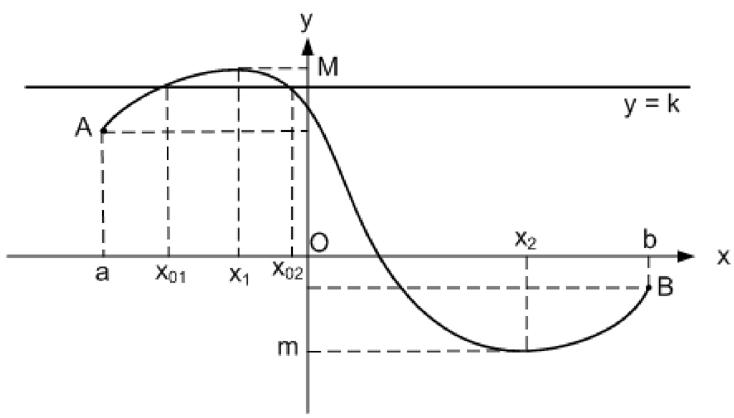
1) f(x) đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a; b], nghĩa là

$$\begin{cases} \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in [a;b], m \le f(x) \le M; \\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = M; f(x_2) = m. \end{cases}$$

2) f(x) đạt mọi giá trị trung gian giữa giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên [a; b], nghĩa là

$$\forall m \le k \le M, \exists x_0 \in [a;b], f(x_0) = k.$$

Minh họa:



2.2. Hệ quả. 1) Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Giả sử f(a)f(b) < 0, nghĩa là f(a) và f(b) trái dấu. Khi đó phương trình f(x) = 0 có nghiệm trên khoảng (a; b), nghĩa là tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

2) Giả sử hàm số f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và phương trình f(x) = 0 vô nghiệm trên khoảng này. Khi đó f(x) không đổi dấu trên khoảng (a; b).

Ví dụ 1. Chứng minh mọi phương trình đại số bậc lẻ:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \qquad (1)$$

với n nguyên dương lẻ, luôn luôn có nghiệm thực.

Giải. Đặt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Khi $x \to -\infty$, $f(x) \sim a_n x^n \to -\infty$ (do n lẻ), nên tồn tại a < 0 khá bé sao cho f(a) < 0.

Khi $x \to +\infty$, $f(x) \sim a_n x^n \to +\infty$, nên tồn tại b > 0 khá lớn sao cho f(b) > 0.

Vì hàm số f(x) liên tục trên [a; b] và f(a)f(b) < 0 nên theo hệ quả trên, phương trình f(x) = 0 có nhiệm trên [a; b] và do đó phương trình (1) có nghiệm thực.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình:

$$(x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})<0 \qquad (1)$$

Giải. Điều kiện: x >0. Đặt $f(x)=(x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})$. Ta có f(x) liên tục trên (0; $+\infty$). Hơn nữa,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ 1-\ln x=0 \\ x-\sqrt{x^2-4x+20}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \vee x=5 \\ x=e \\ x=5 \end{array}\right.$$

Ta lập bảng xét dấu:

x	0		1		e		5		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	0	-	

Lưu ý rằng, do tính liên tục, f(x) không đổi dấu trên mỗi khoảng của bảng xét dấu. Do đó ta chỉ cần thế một giá trị của mỗi khoảng vào f(x) để biết dấu của f(x) trên các khoảng này. Từ bảng xét dấu trên ta suy ra:

$$f(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ hay } e < x < 5 \text{ hay } x > 5.$$

Do đó, bất phương trình (1) có tập nghiệm là:

$$S = (0;1) \cup (e;5) \cup (5;+\infty).$$

D- ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1.1. Định nghĩa. 1) Cho hàm f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0. Khi cho x_0 một số gia Δx khá bé thì số gia tương ứng của f(x) là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Lập tỉ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Nếu tỉ số này có giới hạn là $A \in R$ khi $\Delta x \to 0$ thì ta nói f(x) có đạo hàm tại x_0 và A là đạo hàm của f(x) tại x_0, ký hiệu $f'(x_0) = A$.

Như vậy,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2) Tương tự, ta định nghĩa:

- f(x) có đạo hàm bên trái tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^-)$, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- f(x) có đạo hàm bên phải tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^+)$, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3) f(x) có đạo hàm trên (a,b) nếu f(x) có đạo hàm tại mọi $x_0 \in (a,b)$.

4) f(x) có đạo hàm trên [a,b] nếu f(x) có đạo hàm trên (a,b) và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C): y = f(x) tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in (C)$. Do đó phương trình của tiếp tuyến với đường cong (C): y = f(x) tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in (C)$ là:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

1.3. Ý nghĩa kinh tế của đạo hàm:

1) Định nghĩa: Biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu $M_x y(x_0)$, là độ biến đổi của đại lượng y khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị tại x_0.

2) Biểu thức toán học của biên tế:

Giả sử tại $x = x_0$ ta cho x một số gia là Δx đơn vị. Khi đó độ biến đổi của đại lượng y = f(x) là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Do đó khi x tăng 1 đơn vị thì độ biến đổi trung bình của đại lượng y = f(x) là

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Để biết chính xác độ biến đổi của đại lượng y = f(x) khi x tăng 1 đơn vị tại trạng thái (x_0,y_0) ta phải chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$. Theo định nghĩa trên, độ biến đổi đó chính là biên tế $M_x y(x_0)$ của y = f(x) theo x tại x_0 nên

$$M_x y(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Như vậy, biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0 chính là đạo hàm $y'(x_0) = f'(x_0)$ của y = f(x) tại x_0:

$$\boxed{M_x y(x_0) = y'(x_0)}$$

Tổng quát, biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x chính là đạo hàm y' = f'(x) của y = f(x):

$$\boxed{M_x y = y'}$$

Chú ý: Trong thực tế, biên tế $M_x y(x_0)$ của y = f(x) theo x tại x_0 xấp xỉ bằng độ biến đổi của y khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị từ trạng thái $x = x_0$.

Ví dụ: Xét mô hình sản xuất một loại sản phẩm. Khi đó hàm tổng chi phí C = C(Q) là hàm theo tổng sản phẩm Q. Chi phí biên tế là:

$$MC(Q) = C'(Q).$$

Chẳng hạn, với hàm tổng chi phí:

$$C = Q^3 + 2Q^2+10$$

ta có chi phí biên tế: $MC(Q) = C'(Q)= 3Q^2+4Q$. Tại Q = 100, ta có MC(100) = 30400. Như vậy, khi đang sản xuất với tổng sản lượng $Q_0 = 100$, nếu tăng tổng sản lượng 1 đơn vị thành $Q_1 = 101$, thì tổng chi phí sẽ tăng thêm 30400 (Thực tế là chi phí tăng thêm $C(Q_1) - C(Q_0) = 30703$).

3) Độ biến đổi tuyệt đối và độ biến đổi tương đối:

Xét đại lượng x. Tại $x = x_0$, cho x một số gia Δx thì x nhận giá trị mới là $x_0+\Delta x$. Ta nói Δx là độ biến đổi tuyệt đối của x tại x_0 và tỉ số $\frac{\Delta x}{x_0}$ là độ biến đổi tương đối của x tại x_0. Độ biến đổi tương đối thường được tính bằng %.

4) Hệ số co giãn: Hệ số co giãn của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu $\varepsilon_{yx}(x_0)$, là độ biến đổi tương đối của y khi x tăng tương đối lên 1%.

5) Biểu thức toán học của hệ số co giãn:

Giả sử tại x_0 ta cho x một số gia là Δx đơn vị. Khi đó:

- Độ biến đổi tuyệt đối của x tại x_0 là Δx.
- Độ biến đổi tương đối của x tại x_0 là

$$\frac{\Delta x}{x_0}.100\%.$$

- Độ biến đổi tuyệt đối của y tại x_0 là:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

- Độ biến đổi tương đối của y tại x_0 ($y_0 = f(x_0)$) là:

$$\frac{\Delta y}{y_0}.100\% = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{y_0}.100\%$$

Do đó, tại $x = x_0$, khi x tăng tương đối 1% thì độ biến đổi tương đối trung bình của đại lượng y = f(x) là

$$\frac{\frac{\Delta y}{y_0}.100\%}{\frac{\Delta x}{x_0}.100} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{x_0}{y_0}\%.$$

Để biết chính xác độ biến đổi tương đối của đại lượng y = f(x) khi x tăng 1 đơn vị tại trạng thái (x_0,y_0) ta phải chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$, Theo định nghĩa trên, độ biến đổi tương đối đó chính là hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x_0)$ của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0 nên

$$\varepsilon_{yx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{x_0}{y_0} = y'(x_0)\frac{x_0}{y_0}.$$

Như vậy, hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x_0)$ của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0 định bởi:

$$\boxed{\varepsilon_{yx}(x_0) = y'(x_0)\frac{x_0}{y_0}}$$

Tổng quát, hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x)$ của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x định bởi:

$$\boxed{\varepsilon_{yx}(x) = y'(x)\frac{x}{y}}$$

Ví dụ. Xét mô hình sản xuất một loại sản phẩm. Khi đó hàm cầu $Q_D = Q(P)$ là hàm giảm theo đơn giá P. Hệ số co giãn $\varepsilon_{Q_D P}$ thường được viết tắt là ε_D. Ta có:

$$\varepsilon_D = Q'(P)\frac{P}{Q} < 0.$$

Hệ số co giãn ε_D cho biết lượng cầu sẽ giảm bao nhiêu phần trăm khi ta tăng giá 1%.

Chẳng hạn, với hàm cầu $Q_D = 1000 - 5P$, hệ số co giãn ε_D là:

$$\varepsilon_D = Q'(P)\frac{P}{Q} = -\frac{5P}{1000 - 5P}$$

Tại $P_0 = 120$, $\varepsilon_D(P_0) = -1,5$, nghĩa là khi đang bán với đơn giá $P_0 = 120$, nếu tăng giá lên 1%, thì lượng cầu sẽ giảm đi khoảng 1,5%.

1.4. Định lý. Nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) liên tục tại x_0.

1.5. Chú ý. Một hàm số liên tục tại x_0 không nhất thiết có đạo hàm tại điểm đó.

2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐẠO HÀM

2.1. Định lý. Giả sử các hàm u = u(x) và v = v(x) có các đạo hàm $u' = u'(x)$; $v' = v'(x)$. Ta có

1	$(u + v)' = u' + v'$
2	$(ku)' = ku'$ (k: Const)
3	$(uv)' = u'v + uv'$
4	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$
5	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

2.2. Định lý (đạo hàm của hàm số hợp). Xét hàm hợp $y = f[\varphi(x)]$. Nếu hàm y = f(u) có đạo hàm theo biến u là $y'_u = f'(u)$ và $u = \varphi(x)$ có đạo hàm theo biến x là $u'_x = \varphi'(x)$. Khi đó hàm hợp $y = f[\varphi(x)]$ có đạo hàm theo biến x là $y'_x = y'_u . u'_x$.

2.3. Định lý (đạo hàm của hàm số ngược). Giả sử hàm số x = g(y) có hàm ngược là y = f(x). Khi đó nếu x = g(y) có đạo hàm theo y là $x'_y = g'(y) \neq 0$ và hàm ngược y = f(x) liên tục theo biến x thì y = f(x) có đạo hàm theo x định bởi

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}$$

Ví dụ: 1) Tính đạo hàm của các hàm số y = arcsinx và y = arccosx.

2) Tính đạo hàm của hàm y = arctgx và y = arccotgx.

Giải. 1) y = arcsinx $(-1 \leq x \leq 1; -\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ là hàm ngược của hàm x = siny. Với mỗi $-\pi/2 < y < \pi/2$, ta có

$$x'_y = \cos y > 0.$$

Do đó

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vậy $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Tương tự, ta có

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

2) $y = \text{arctg}x$ ($x \in R$, $-\pi/2 < y < \pi/2$) là hàm ngược của hàm $x = \text{tg}y$. Với mỗi $-\pi/2 < y < \pi/2$, ta có

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Do đó

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vậy $$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tương tự, ta có

$$(\text{arc}\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.4. Bảng đạo hàm:

	ĐẠO HÀM HÀM SỐ f(x)	**ĐẠO HÀM HÀM SỐ f(u) với u = u(x)**
1	$(C)' = 0$ (C: Const)	$(C)'$ (C: Const)
2	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α: Const)	$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ (α: Const)
	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
3	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' e^u$

4	$(a^x)' = a^x\ln a$ (0 < a: Const)	$(a^u)' = u'a^u\ln a$ (0 < a: Const)
5	$(\ln\mid x\mid)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln\mid u\mid)' = \dfrac{u'}{u}$
6	$(\log_a\mid x\mid)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ (0 < a ≠ 1: Const)	$(\log_a\mid u\mid)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$ (0 < a≠ 1: Const)
7	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
9	$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2x$	$(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \mathrm{tg}^2u)$
10	$(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2x)$	$(\cot gu)' - \dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot g^2u)$
11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$(\mathrm{arc\,tg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc\,tg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
14	$(\mathrm{arc\,cotg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arc\,cotg}u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

2.5. Đạo hàm của hàm số dạng $y = u^v$ với $u = u(x)$; $v = v(x)$

Để tính đạo hàm của hàm số trên ta tiến hành như sau:

Lấy logarit cả 2 vế của $y = u^v$, ta được:

$$\ln y = v\ln u \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được:

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Do đó

$$y' = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})y = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})u^v.$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm $y = x^{\sin x}$.

Giải. Lấy logarit cả 2 vế của $y = x^{\sin x}$, ta được

$$\ln y = \sin x\ln x \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Do đó

$$y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

2.6. Đạo hàm của hàm ẩn

Xét phương trình

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

Giả sử $y = y(x)$ $(x \in D)$ là hàm số thỏa $F(x,y(x)) = 0$ với mọi $x \in D$. Ta nói y là hàm ẩn được xác định bởi phương trình (1).

Ta có thể tìm đạo hàm y' của hàm ẩn y xác định bởi phương trình (1), theo x và y, mà không cần xác định biểu thức tường minh của hàm số $y = y(x)$, bằng cách lấy đạo hàm hai vế của (1) theo biến x, trong đó y là một hàm theo biến x. Chú ý rằng khi lấy đạo hàm như vậy ta phải sử dụng định lý về đạo hàm hàm hợp.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $\mathrm{tg}y = xy$.

Giải. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $\mathrm{tg}y = xy$ ta được

$$(1 + \mathrm{tg}^2 y)y' = y + xy'$$

Suy ra $(1 + x + \mathrm{tg}^2 y)y' = y$. Từ đó

$$y' = \frac{y}{1 - x + \mathrm{tg}^2 y}.$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm $y' = y'(0)$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình

$$x^3 - xy - xe^y + y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Giải. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $x^3 - xy - xe^y + y - 1 = 0$. ta được

$$3x^2 - y - xy' - e^y - xe^y y' + y' = 0. \qquad (3)$$

Thế $x = 0$ vào (2) ta được $y = 1$. Thế $x = 0$, $y = 1$ vào (3) ta được $-1 - e + y' = 0$. Suy ra $y'(0) = 1 + e$.

2.6. Đạo hàm của hàm số cho bởi phương trình tham số

Giả sử hàm số y phụ thuộc biến số x không trực tiếp mà thông qua một biến số trung gian t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

và hàm số $x = \varphi(t)$ có hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$, hơn nữa các hàm φ, ψ và φ^{-1} đều có đạo hàm. Khi đó hàm số $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ có đạo hàm theo x. Thật vậy, ta có $y'_t = y'_x.x'_t$. Suy ra

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm y′= y′(x) của hàm số y = y(x) cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = 2t - 2\mathrm{arctg}t. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(2t - 2\mathrm{arctg}t)'}{(\ln(1+t^2))'_t} = \frac{2 - \dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = t.$$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm y′= y′(2) của hàm số y = y(x) cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 2e^t; \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t+t^2)'}{(2e^t)'_t} = \frac{1+2t}{2e^t}.$$

Tại x = 2 ta có $2e^t = 2$ nên t = 0. Suy ra y'(2) = 1/2.

3. VI PHÂN

Cho hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0. Đặt

$$\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Khi đó, $\varphi(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, và

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\varphi(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

trong đó $o(\Delta x) = \Delta x\varphi(\Delta x)$. Chú ý rằng

$$\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \varphi(\Delta x) \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

nên $o(\Delta x)$ là một VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$. Ta nói f(x) khả vi tại x_0 và vi phân của f(x) tại x_0 là $f'(x_0)\Delta x$ theo định nghĩa sau:

3.1. Định nghĩa. Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0. Ta nói f(x) khả vi tại x_0 nếu tồn tại một hằng số A và một hàm số $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$ sao cho với mọi Δx khá bé ta có

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Khi đó đại lượng AΔx được gọi là vi phân của f(x) tại điểm x_0, ký hiệu là $df(x_0)$. Như vậy,

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

Lý luận trên cho thấy nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) khả vi tại x_0 và $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Tổng quát hơn, ta có kết quả sau:

3.2. Định lý. Hàm số f(x) khả vi tại x_0 khi và chỉ f(x) có đạo hàm tại x_0. Khi đó vi phân của f(x) tại x_0 là $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

3.3. Biểu thức của vi phân:

Từ kết quả trên, ta có vi phân của f(x) định bởi:

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Nhận xét rằng với g(x) = x thì g′(x) = 1, do đó dg(x) = 1.Δx = Δx, nghĩa là dx = Δx. Do đó ta có biểu thức của vi phân của f(x) như sau:

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

Chú ý. Do công thức trên, ta có:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

3.4. Ý nghĩa của vi phân và công thức tính gần đúng:

Cho hàm số f(x) khả vi tại x_0. Khi đó với mọi Δx khá bé ta có

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Vì $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$ nên khi Δx khá bé ta có

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Nói cách khác, khi Δx khá bé, số gia $\Delta f(x_0)$ của f(x) tại x_0 gần bằng vi phân $df(x_0)$ của f(x) tại x_0 và ta có công thức tính gần đúng:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)}$$

Ví dụ. Cho hàm số y = arctgx. Tìm các vi phân dy và dy(1). Áp dụng: Tính gần đúng arctg(1,02).

Giải. 1) Vi phân $dy = y'dx = \dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2) Vi phân $dy(1) = y'(1)dx = \dfrac{1}{1+1^2}dx = \dfrac{1}{2}dx$.

3) Ta tính gần đúng arctg(1,02) như sau: Đặt $x_0 = 1$; Δx = 0,02. Ap dụng công thức tính gần đúng cho hàm số y = arctgx, ta được

$$y(1,02) \approx y(1) + dy(1).$$

Do đó arctg(1,02) ≈ arctg1 + (1/2).0,02= π/4 + 0,01.

3.5. Định lý. Cho các hàm số u = u(x) và v = v(x) có các vi phân là du và dv. Ta có

1	$d(u + v) = du + dv$
2	$d(ku) = kdu$; (k: Const)
3	$d(uv) = udv + vdu$
4	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

4.1. Đạo hàm cấp cao

1) Định nghĩa. Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm $f'(x)$. Ta còn gọi $f'(x)$ là đạo hàm cấp một của f(x).

Nếu hàm số $f'(x)$ lại có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp hai của f(x), ký hiệu là $f''(x)$ hay $f^{(2)}(x)$. Như vậy,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp (n−1) của f(x) được gọi là đạo hàm cấp n của f(x),ký hiệu là $f^{(n)}(x)$. Như vậy,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'}$$

2) Định lý. Giả sử các hàm u = u(x) và v = v(x) có các đạo hàm cấp n là $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$; $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$. Ta có

$$\text{a) } (u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)};$$

$$\text{b) } (ku)^{(n)} = ku^{(n)}; \qquad (k\text{: Const})$$

$$\text{c) } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

trong đó $u^{(0)} = u$ và $v^{(0)} = v$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = x^n$;   b) y = sinx;   c) y cosx;   d) $y = \dfrac{1}{x + a}$ (a: const)   e) $y = x^2\sin x$.

Giải. a) Với $y = x^n$, ta có

$y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, ...,

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)...3.2.1 = n!$,

$y^{(k)} = 0; \forall k > n.$

b) Với $y = \sin x$, ta có

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$.

Tổng quát, $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

c) Tương tự, với $y = \cos x$, ta có: $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

d) Với $y = \dfrac{1}{x+a}$, ta có

$$y' = -\frac{1}{(x+a)^2}; y'' = (-1)^2\frac{2}{(x+a)^3}$$

Ta chứng minh

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}. \qquad (1)$$

Với $n = 1$, (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, nghĩa là

$$y^{(k)} = (-1)^k\frac{k!}{(x+a)^{k+1}}.$$

Với $n = k + 1$, ta có

$$y^{(k+1)} = \left((-1)^k\frac{k!}{(x+a)^{k+1}}\right)' = -(-1)^k\frac{k!(k+1)(x+a)^k}{(x+a)^{2(k+1)}} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+a)^{k+2}}.$$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k + 1$. Ta kết luận

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

e) Đặt $u = x^2$, $v = \sin x \Rightarrow y = uv$. Theo các kết quả trên ta có

$$u' = 2x, u'' = 2, u(k) = 0, \forall k \geq 3;$$

$$v^{(m)} = \sin(x + m\frac{\pi}{2}).$$

Suy ra

$$y' = 2x\sin x + x^2\sin(x+\frac{\pi}{2}) = x^2\sin(x+\frac{\pi}{2}) - 2x\cos(x+\frac{\pi}{2}).$$

Với $n \geq 2$ ta có

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)}$$

$$= x^2\sin(x+n\frac{\pi}{2}) + 2nx\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2}) + n(n-1)\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2}).$$

$$= (x^2 - n^2 + n)\sin(x+n\frac{\pi}{2}) - 2nx\cos(x+n\frac{\pi}{2}).$$

Kết luận

$$y^{(n)} = (x^2 - n^2 + n)\sin(x+n\frac{\pi}{2}) - 2nx\cos(x+n\frac{\pi}{2}), \forall n \geq 1.$$

4.2. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số f(x) có vi phân df(x)= f'(x)dx. Ta còn gọi df(x) là vi phân cấp một của f(x).

Nếu hàm số $f'(x)$ khả vi thì $df(x) = f'(x)dx$ có vi phân và vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của f(x), ký hiệu $d^2f(x)$. Ta có

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d[f'(x)dx] = f''(x)dx.dx = f''(x)dx^2.$$

Vậy $d^2f(x) = f^{(2)}(x)dx^2$.Tổng quát, vi phân của vi phân cấp (n − 1) của f(x) được gọi là vi phân cấp n của f(x), ký hiệu $d^nf(x)$. Ta có

$$\boxed{d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n}$$

Ví dụ. Với $y = \sin x$, ta có $d^ny = y^{(n)}dx^n = \sin(x + n\frac{\pi}{2})dx^n$.

5. QUI TẮC L'HOSPITAL

5.1. Định lý (Qui tắc L'Hospital). Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ (nghĩa là: $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ hoặc $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$). Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

5.2. Chú ý. 1) Nếu sau khi sử dụng Qui tắc L'Hospital mà giới hạn vẫn còn dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ thì ta có thể sử dụng tiếp qui tắc này. Lưu ý: Nên kết hợp với qui tắc thay thế hàm tương đương để việc tính đạo hàm được dễ dàng hơn.

2) Qui tắc L'Hospital chỉ được áp dụng trực tiếp cho giới hạn thuộc hai dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$. Đối với các dạng vô định khác, muốn áp dụng ta cần đưa về một trong hai dạng vô định trên mà ta có thể tóm tắt trong bảng sau:

BẢNG ÁP QUI TẮC L'HOSPITAL TÌM GIỚI HẠN			
DẠNG VÔ ĐỊNH	**GIỚI HẠN**	**BIẾN ĐỔI**	**QUI TẮC L'HOSPITAL**
0/0	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$		$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
∞/∞	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$		$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
0.∞	$L = \lim\limits_{x\to A} f(x)g(x)$	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ hay $L = \lim\limits_{x\to A}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$ hay $L = \lim\limits_{x\to A}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$
∞ − ∞	$L = \lim\limits_{x\to A}[f(x) - g(x)]$	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$	$L = \lim\limits_{x\to A}\frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right)'}$
1^∞	$L = \lim\limits_{x\to A} f(x)^{g(x)}$	$L = e^{\overbrace{\lim\limits_{x\to A}[f(x)-1]g(x)}^{K}}$	$K = \lim\limits_{x\to A}\frac{[f(x)-1]'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$ hay $K = \lim\limits_{x\to A}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)'}$
1^∞ 0^0 ∞^0	$L = \lim\limits_{x\to A} f(x)^{g(x)}$	$L = e^{\overbrace{\lim\limits_{x\to A} g(x)\ln f(x)}^{K}}$	$K = \lim\limits_{x\to A}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}. \qquad L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x). \qquad L_4 = \lim_{x\to -\infty} x^{10}e^x.$$

$$L_5 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad L_6 = \lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}}$$

$$L_7 = \lim_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)}$$

Giải. 1) $L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. Ta thấy L_1 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$\overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

2) $L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})}$. Ta thấy L_2 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}}{\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}} = -\lim_{x\to 1}\sin(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}) = 0.$$

3) $L_3 = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x)$. Ta thấy L_3 có dạng vô định $\infty - \infty$. Ta biến đổi

$$\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t g^2 x} = \frac{t g^2 x - x^2}{x^2 t g^2 x} = \frac{(t gx + x)(t gx - x)}{x^2 t g^2 x}.$$

Khi $x \to 0$, ta có $tgx + x \sim 2x$ và $x^2 tg^2 x \sim x^4$. Do đó

$$\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x = \frac{(t gx + x)(t gx - x)}{x^2 t g^2 x} \sim \frac{2x(t gx - x)}{x^4} = \frac{2(t gx - x)}{x^3}$$

Suy ra $L_3 = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{t gx - x}{x^3}$. Ta thấy bây giờ giới hạn L_3 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$L_3 = 2\lim_{x\to 0} \frac{t gx - x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0} \frac{(1 + t g^2 x) - 1}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{t g^2 x}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

4) $L_4 = \lim\limits_{x\to -\infty} x^{10} e^x$. Ta thấy L_4 có dạng vô định $0.\infty$. Ta biến đổi

$$L_4 = \lim_{x\to -\infty} x^{10} e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{10}}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}} \right)^{10} = (K_4)^{10}.$$

trong đó $K_4 = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}}$. Ta thấy K_4 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_4 = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}} = 0.$$

Suy ra $L_4 = (K_4)^{10} = 0$.

5) $L_5 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$. Ta thấy L_5 có dạng vô định 1^{∞}. Ta có

$$L_5 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)}$$

Xét giới hạn

$$K_5 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(3^x + 4^x\right) - \ln 2}{x}.$$

Ta thấy K_5 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$K_5 = \lim_{x\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(3^x + 4^x\right) - \ln 2}{x}. = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3^x \ln 3 + 4^x \ln 4}{3^x + 4^x}}{1} = \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} = \frac{1}{2}\ln 12 = \ln\sqrt{12}.$$

Suy ra

$$L_5 = e^{K_5} = e^{\ln\sqrt{12}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

6) $L_6 = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}}$. Ta thấy L_5 có dạng vô định 0^0. Ta có

$$L_6 = \lim_{x\to 2^+}\left(x-2\right)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}} = e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}\ln(x-2)}$$

Xét giới hạn

$$K_6 = \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}\ln\left(x-2\right) = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(x-2\right)}{\ln|\sin(2-x)|}.$$

Ta thấy K_6 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_6 = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(x-2\right)}{\ln|\sin(2-x)|} = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\cos(2-x)}{\sin(2-x)}} = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\sin(2-x)}{2-x}\frac{1}{\cos(2-x)} = 3.$$

Suy ra $L_6 = e^{K_6} = e^3$.

7) $L_7 = \lim\limits_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)}$. Ta thấy L_7 có dạng vô định ∞^0. Ta có

$$L_7 = \lim_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)\ln(\cot gx)}$$

Xét giới hạn

$$K_7 = \lim_{x\to 0^+}\ln(1+2x)\ln(\cot gx).$$

Ta thấy K_7 có dạng vô định $0.\infty$. Khi $x \to 0^+$, ta có $\ln(1+2x) \sim 2x$, do đó

$$\ln(1+2x)\ln(\cot gx) \sim 2x\ln(\cot gx).$$

Suy ra

$$K_7 = \lim_{x\to 0^+}2x\ln(\cot gx) = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot gx)}{\frac{1}{x}}.$$

Ta thấy bây giờ giới hạn K_7 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_7 = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot gx)}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\cot gx}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin x\cos x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x\cos x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x} = 0.$$

Suy ra $L_7 = e^{K_7} = e^0 = 1.$

6. KHAI TRIỂN TAYLOR

6.1. Định lý (Taylor). Cho hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n + 1 liên tục trên đoạn [a,b]. Khi đó với mỗi $x_0 \in [a,b]$, ta có

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \quad (1)$$

với mọi $x \in [a,b]$, trong đó c nằm giữa x_0 và x. Ta gọi (1) là khai triển Taylor đến cấp n của f(x) tại x_0 với phần dư dưới dạng Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad .$$

Chú ý rằng $R_n(x)$ là một VCB cấp cao hơn VCB $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$ nên ta có thể viết $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$. Như vậy, (1) còn được viết dưới dạng:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)} \quad (1')$$

Ta gọi (1′) là khai triển Taylor đến cấp n của f(x) tại x_0 với phần dư dưới dạng Peano.

6.2. Khai triển MacLaurin. Khai triển Taylor của f(x) tại $x_0 = 0$ được gọi là khai triển MacLaurin của f(x). Như vậy, khai triển MacLaurin đến cấp n của f(x) định bởi:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad (2)$$

hay

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)} \quad (2')$$

trong đó c nằm giữa 0 và x; $o(x^n)$ là một VCB cấp cao hơn VCB x^n khi $x \to 0$.

6.3. Khai triển MacLaurin của một số hàm sơ cấp:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \sin[c + (2k+3)\frac{\pi}{2}]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos[c + (k+1)\pi]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \qquad (x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x > -1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (x < 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (x > -1) \end{array}}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})}$$

6.4. Ứng dụng

1) Tính xấp xỉ. Ta thường dùng khai triển MacLaurin để tính xấp xỉ giá trị của hàm f(x) sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ. Tính $\cos 25^o$ chính xác đến 0,00001.

Giải. Xét khai triển MacLaurin của cosx:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]$$

Phần dư của khai triển là:

$$R_n(x) = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]$$

Với $x = 25^o = \dfrac{5\pi}{36}$, ta có:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]\right| \le \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+2)!}\left(\frac{5\pi}{36}\right)^{2k+2}$$

Chọn k = 2, ta có:

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{6!}\left(\frac{5\pi}{36}\right)^{2k+2} < 0,00001.$$

Vậy ta có thể tính $\cos 25^o$ chính xác đến 0,00001 nhờ công thức:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

nghĩa là

$$\cos 25^{\circ} = \cos\frac{5\pi}{36} \approx 1 - \frac{\left(\frac{5\pi}{36}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{5\pi}{36}\right)^4}{4!} \approx 0,90632.$$

2) Tính giới hạn dạng vô định:

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \text{tg}x)}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{3x - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1 - x) + 6x + 3x^2 + 2x^3}.$$

Giải. 1) $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \text{tg}x)}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4 = 2 - 2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - x^2 + 2x^4 = \frac{23}{12}x^4 + o(x^5) \sim \frac{23}{12}x^4,$$

$$x - \text{tg}x = x - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^5)) = -\frac{x^3}{3} + o(x^4) \sim -\frac{x^3}{3} \Rightarrow x(x - \text{tg}x) \sim -\frac{x^4}{3}.$$

nên

$$\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \text{tg}x)} \sim \frac{\frac{23}{12}x^4}{-\frac{x^4}{3}} \to -\frac{23}{4}.$$

Vậy $L_1 = -\frac{23}{4}$.

2) $L_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6 = 6(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + x^3 - 3x^2 - 6x - 6 = 2x^3 + o(x^3) \sim 2x^3,$$

$$x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^3}{6}.$$

nên

$$\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x} \sim \frac{2x^3}{\frac{x^3}{6}} \to 12.$$

Vậy $L_2 = 12$.

3) $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$3x - x^3 + x^4 - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4 = 3x - x^3 + x^4 - 3(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)) \; = x^4 + o(x^4) \sim x^4,$$

$$6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3 = 6(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)) + 6x + 3x^2 + 2x^3 = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{3}{2}x^4.$$

Suy ra

$$\frac{3x - x^3 + x^4 - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3} \sim \frac{x^4}{-\frac{3}{2}x^4} \to -\frac{2}{3}.$$

Vậy $L_3 = -\frac{2}{3}$.

7. ỨNG DỤNG

7.1. Tính đơn điệu - Cực trị - Tính lồi lõm - Điểm uốn - GTLN - GTNN

Sinh viên tự ôn

7.2. Bài toán lập kế hoạch sản xuat để đạt lợi nhuận tối đa

Bài toán: Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D=D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C=C(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Phương pháp giải: Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó

$$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q).$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = D^{-1}(Q).Q$$

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = Q.D^{-1}(Q) - C(Q)$$

Ta cần xác định giá trị $Q > 0$ để $\pi(Q)$ đạt cực đại. Thông thường ta chỉ cần tìm $Q = Q_0 > 0$ sao cho $\pi'(Q_0) = 0$ và $\pi''(Q_0) < 0$, hơn nữa, để phù hợp với thực tế, tại $Q = Q_0$ ta phải có lợi nhuận, đơn giá và tổng chi phí đều dương.

Ví dụ: Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^3 - 77.Q^2 + 1000Q + 40000$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho:

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 656 - \frac{1}{2}P = Q \Leftrightarrow P = 1312 - 2Q.$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = (1312 - 2Q)Q.$$

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= R(Q) - C(Q)\\ &= (1312 - 2Q)Q - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000)\\ &= -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 40000.\end{aligned}$$

Cần xác định giá trị $Q > 0$ để $\pi(Q)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 150Q + 312.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\pi'(Q) = 0 &\Leftrightarrow -3Q^2 + 150Q + 312 = 0\\ &\Leftrightarrow Q = -2 \text{ (loại) hay } Q = 52.\end{aligned}$$

Ta cũng có: $\pi''(Q) = -6Q + 150$ nên $\pi''(52) < 0$. Suy ra $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = 52$. Khi đó ta có các số liệu sau đều phù hợp:

- Lợi nhuận là $\pi = 38416 > 0$.
- Đơn giá là $P = 1208 > 0$.
- Tổng chi phí là $C = 24400 > 0$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức sản lượng $Q = 52$. Khi đó lợi nhuận tương ứng là $\pi = 38416$.

7.3. Bài toán thuế doanh thu

Bài toán: Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D=D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C=C(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên môt đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Phương pháp giải: Với mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm, xí nghiệp sẽ định mức sản lượng Q phụ thuộc vào t sao cho đạt lợi nhuận tối đa. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó

$$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q).$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = D^{-1}(Q).Q$$

- Tiền thuế xí nghiệp phải nộp là: $T(t) = Qt$.
- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) - Qt = D^{-1}(Q).Q - C(Q) - Qt.$$

Như đã nói ở trên, ta cần xác định Q sao cho $\pi(Q)$ đạt cực đại. Khi đó $Q = Q(t)$ (Q phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là $T = Q(t)t$. Để thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T = Q(t)t$ đạt cực đại. Chú ý rằng để phù hợp với thực tế, tại giá trị t tìm được ta phải có sản lượng, đơn giá, lợi nhuận và tổng chi phí đều dương.

Ví dụ. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2000 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^2 + 1000Q + 50$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho:

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 2000 - P = Q \Leftrightarrow P = 2000 - Q.$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = (2000 - Q)Q.$$

- Tiền thuế xí nghiệp phải nộp là: $T(t) = Qt$.
- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= R(Q) - C(Q) - Qt \\ &= (2000 - Q)Q - (Q^2 + 1000Q + 50) - Qt \\ &= -2Q^2 + (1000 - t)Q - 50.\end{aligned}$$

Mức sản lượng được định ra sao cho $\pi(Q)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(Q) = -4Q + 1000 - t.$$

Suy ra:

$$\pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow -4Q + 1000 - t = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1000 - t}{4}.$$

Vì $\pi''(Q) = -4 < 0$ nên $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = \dfrac{1000 - t}{4}$. Khi đó tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là:

$$T(t) = Qt = \frac{1000t - t^2}{4}.$$

Ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T(t)$ đạt cực đại.

Ta có

$$T'(t) = \frac{1000 - 2t}{4}.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1000 - 2t}{4} = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T''(t) = -1/2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 500$. Khi đó ta có các số liệu sau đều phù hợp:

- Sản lượng là $Q = 125 > 0$. Tiền thuế thu được là $T = 62500$.
- Đơn giá là $P = 1875 > 0$.
- Lợi nhuận là $\pi = 31200 > 0$.
- Tổng chi phí là $C = 140675 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 62500$.

7.4. Bài toán thuế nhập khẩu

Bài toán: Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 < P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Phương pháp giải: Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thỏa điều kiện $t > 0$ và $t + P_1 < P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ nhập sản phẩm trên để bán với đơn giá P thỏa $t + P_1 < P < P_0$ với số lượng là $Q_D - Q_S = D(P) - S(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)[D(P) - S(P)].$$

Tất nhiên công ty sẽ chọn đơn giá để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Khi đó $P = P(t)$ (P phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[D(P(t)) - S(P(t))].$$

Để thu được nhiều thuế nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế t phải thỏa $t + P_1 < P_0$ và để phù hợp với thực tế, ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế) là $P_1 = 1600$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

Giải. Trước hết ta tìm đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có:

$$Q_S = Q_D \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200.$$

Vậy đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa là $P_0 = 2200$.

Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Điều kiện: $t > 0$; $1600 + t < 2200$ (*).

Khi đó: Đơn giá P thỏa $1600 + t < P < 2200$ (**) và ta có

- Lượng hàng mà công ty nhập về là:

$$Q_D - Q_S = (4200 - P) - (P - 200) = 4400 - 2P.$$

- Lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)[\, Q_D \;\; Q_S] = (P - 1600 - t)(4400 - 2P)$$
$$= -2P^2 + 2(3800 + t)P - 4400(1600 + t).$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(P) = -4P + 2(3800 + t).$$

Suy ra:

$$\pi'(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(3800 + t) = 0 \Leftrightarrow \quad P = 1900 + \frac{t}{2}.$$

Vì $\pi''(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 1900 + \frac{t}{2}$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[\, Q_D - Q_S] = t\,(4400 - 2P) = t(600 - t).$$

Ta cần xác định t để T(t) đạt cực đại. Ta có:

$$T'(t) = 600 - 2t.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 600 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 300.$$

Vì $T''(t) = -2 < 0$ nên T(t) đạt cực đại tại $t = 300$ với $T(t) = 90000$. Kiểm tra ta thấy điều kiện (*); (**) được thỏa và các số liệu sau đều phù hợp:

- Đơn giá là $P = 2050 > 0$.
- Lượng cung $Q_S = 1850 > 0$.
- Lượng cầu là $Q_D = 2150 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 300$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 90000$.

7.5. Bài toán thuế xuất khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 > P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng xuất khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Phương pháp giải: Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thỏa điều kiện $t > 0$ và $P_1 - t > P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ thu mua sản phẩm trên với đơn giá P thỏa $P_0 < P < P_1 - t$ với số lượng là $Q_S - Q_D = S(P) - D(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\pi(P) = (P_1 - P - t)[S(P) - D(P)].$$

Tất nhiên công ty sẽ chọn đơn giá mua để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Khi đó $P = P(t)$ (P phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[S(P(t)) - D(P(t))].$$

Để thu được nhiều thuế nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế t phải thỏa $P_1 - t > P_0$ và để phù hợp với thực tế, ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá mua, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế) là $P_1 = 3200$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

Giải. Trước hết ta tìm đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_S = Q_D \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200.$$

Vậy đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa là $P_0 = 2200$.

Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Điều kiện: $t > 0$; $3200 - t > 2200$ (*).

Khi đó: Công ty sẽ thu mua với đơn giá P thoả:

$$2200 < P < 3200 - t \ (**)$$

- Lượng hàng mà công ty xuất khẩu là:

$$Q_S - Q_D = (P - 200) - (4200 - P) = 2P - 4400.$$

- Lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\begin{aligned}\pi(P) &= (P_1 - P - t)(Q_S - Q_D) = (3200 - P - t)(2P - 4400)\\ &= -2P^2 + 2(5400 - t)P - 4400(3200 - t).\end{aligned}$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có

$$\pi'(P) = -4P + 2(5400 - t).$$

Suy ra:

$$\pi'(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(5400 - t) = 0 \Leftrightarrow P = 2700 - \frac{t}{2}.$$

Vì $\pi''(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 2700 - \frac{t}{2}$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là

$$T(t) = t(Q_S - Q_D) = t(2P - 4400) = t(1000 - t).$$

Ta cần xác định t để $T(t)$ đạt cực đại. Ta có

$$T'(t) = 1000 - 2t.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T''(t) = -2 < 0$ nên T(t) đạt cực đại tại t= 500 với T(t) = 250000. Kiểm tra ta thấy điều kiện (*) được thỏa và các số liệu sau đều phù hợp:

- Đơn giá là P = 2450 > 0 và thoả (**).
- Lượng cung $Q_S = 2250 > 0$.
- Lượng cầu là $Q_D = 1750 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế xuất khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là t = 500. Khi đó tiền thuế thu được là T = 250000.

BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\ln(\cos 4x)}.$$

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3\sin x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-2}{\sin 2x}$$

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)+2\arcsin^3 x}{1-\cos 4x+\sin^2 x}$$

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3+\operatorname{tg}^2 3x)+2\arcsin^2 x}{1-\cos^3 2x+\sin^2 x}$$

$$e)\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x+4)(1-\cos 2x)+(e^{2x}-1)^2+x^4}{\ln(\cos 4x)+x^3}.$$

$$f)\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+3x+4)\ln(\cos x)+\cos 2x-1}{(x^2+2x+2)(\sin 2x+x^2)^2}$$

$$g)\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-e^x)(x^2+1-\cos x)}{x(\cos 3x-\cos x)\ln(1+e^2-\cos x)}$$

$$h)\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)(x^2-2x+\sin\frac{\pi x}{2})+\sin\frac{\pi x}{2}-e^{(x-1)^2}}{(e^{2x}-e^2)(x^4-1)+\ln^2 x}$$

$$i)\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\ln(x+2)+x^3+4x^2+5x+1+e^{(x+1)^2}}{(1+\cos\pi x)(x^3+1)-\sqrt{x^2+2x+2}+1}$$

$$j)\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}(x^3-3x-2)+\sqrt{7+x}-3e^{x-2}+x^3-3x^2+4}{x(e^{2x}-e^4)+\sin\pi x+\cos\pi x-1}$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+x}}-\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-x}}).$$

$$b)\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+x}}-\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-x}})$$

$$c)\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{3x^3+3x^2+x+1}-\sqrt[3]{3x^3-x^2+1})$$

$$d)\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{2x^3+x^2+2x+1}+\sqrt[3]{1-x^2-2x^3})$$

$$e)\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x\sqrt{x^4+1}+2x+1}+\sqrt[3]{1-x^2-x^3})$$

3. Tính các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+1}\right). \qquad b)\lim_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\cot gx}$$

$$c)\lim_{x\to0^+}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x} \qquad d)\lim_{x\to0^-}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x}$$

$$e)\lim_{x\to0}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x}$$

4. Định các tham số a, b để các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$a)\ y=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-\cos 2x}{x^3+4x} & \text{nếu } x\neq 0;\\ a & \text{nếu } x=0.\end{cases}\quad \text{tại } x=0.$$

$$b)\ y=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} & \text{nếu } x<0;\\ ax+b & \text{nếu } 0\le x\le 1;\\ \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x^2+2x-3}) & \text{nếu } x>1.\end{cases}\quad \text{tại } x=0 \text{ và } x=1.$$

5. Định các tham số a, b để các hàm số sau liên tục trên **R**:

$$a)\ y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x-2)^3} & \text{nếu } x\neq 2;\\ a & \text{nếu } x=2.\end{cases}$$

b) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x^2 - 3x + 2} & \text{nếu } x < 1; \\ ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } 1 \le x \le 2; \\ \dfrac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{2 - \sqrt{2 + x}} & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

6. Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của các hàm số sau:

a) $y=(x\cos 2x)^{x\sin 3x}$ b) $y = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln 2x}$

7. Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của các hàm ẩn $y = y(x)$ định bởi:

a) $y= x+\operatorname{arctg} y$.

b) $y = 1 + ye^x$.

c) $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$. Từ đó xác định $y'(0)$.

d) $y\cos x + \sin x + \ln y = 0$. Từ đó xác định $y'(\frac{\pi}{2})$.

8. Tìm các đạo hàm $y' = y'(x_0)$ và $y'' = y''(x_0)$ của các hàm số $y = y(x)$ được cho dưới dạng tham số sau:

a) $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = 2t - 2\operatorname{arctg} t \end{cases}$ tại $x_0 = \ln 2$

b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

c) $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = t + t^2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$

9. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm bên trái lẫn đạo hàm bên phải tại điểm này.

10. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$$

có đạo hàm trên R.

11. Cho $y = \sqrt[5]{x}$. Tìm dy và dy(32). Tính gần đúng $\sqrt[5]{31}$.

12. Cho y = $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x}$. Tìm dy và dy(1). Tính gần đúng $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{1,05}$.

13.Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{ac}\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{x(1-\cos 3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin 2x|}{\ln|\sin 3x|}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\ (\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x})$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\ (\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x})$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ (\ln(x-1))^{\operatorname{tg}(1-x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin 3x)^{2/\ln\sin x}$

j) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\ln(x-2)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{x^3}}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{2e^x-x^2-2x-2}$

14. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = x\sin x$ b) $y = x^2\cos x$

c) $y = x^3e^x$ d) $y = \dfrac{x}{e^x}$

e) $y = x^4\ln x$ f) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

15. Tìm khai triển MacLaurin của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{1-\sin x}$ đến số hạng x^5.

b) $y = \cos(\sin 2x)$ đến số hạng x^6.

c) $y = \operatorname{arctg}(\sin 3x)$ đến số hạng x^5.

d) $y = \ln(\cos 2x)$ đến số hạng x^6.

e) $y = \operatorname{arctg}(1-\cos x)$ đến số hạng x^6.

16. Tìm khai triển Taylor tại x_0 của các hàm số sau đến số hạng $(x - x_0)^5$:

a) $y = x\sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{6}$ b) $y = x^2\cos x;\ x_0 = \frac{\pi}{3}$

c) $y = x^3e^x\ ;\ x_0 = 1$ d) $y = \frac{x}{e^x};\ x_0 = 1$

e) $y = x^4\ln x;\ x_0 = 1.$ f) $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3};\ x_0 = 2.$

17. Tính gần đúng chính xác đến 10^{-6}:

a) $\cos 41^o$ b) $\ln 1{,}5.$

18. Xác định cấp của các vô cùng bé sau đây khi chọn x làm vô cùng bé chính:

a) $2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4.$ b) $2x - 2\ln(1+x) - x^2.$

c) $x - 3\mathrm{tg}x + x^3.$ d) $30x - 15\mathrm{arctg}2x + 40x^3 - 96x^5.$

19. Tìm các khoảng tăng giảm và cực trị của các hàm số y sau đây, đồng thời tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của y trên tập D tương ứng:

a) $y = x(1-2\sqrt{x})$;

D = [1/4 , 1]; [1/4 , 1); (1/4 , 1); (1/4 , 1]; [1/4 , + ∞) .

b) $y = e^{x^2/2 - x - 6\ln|x|}$

D = [1 , 4]; (1 , 4]; [1 , 4); (1 , 4); [1 , + ∞); (– ∞, –1).

c) $y = x^3e^{x^2-5x}$

D = [4/3 , 2]; (4/3 , 2); [4/3 , 2); (4/3 , 2); (– ∞ , 4/3); [2 , + ∞); **R**.

d) $y = \sqrt{1+x} - x/4$

D = [1 , 4]; [1, 4); (1 , 4]; (1 , 4); (1, + ∞); [4 , + ∞).

e) $y = \frac{5x-1}{x^2-3x+2}$

D = [–2, 0]; (–2, 0); [–2, 0); (–2 , 0]; (2, + ∞); (– ∞, 0]

f) $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$

D = [–1, 1]; [–2, 0); (–2, 0]; (–2, 0); **R**.

g) $y = \frac{x^2+1}{x^4+1}$

D = [–1, 1]; [0, 2); (0, 2]; (0, 2); **R**.

20. Tìm các khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x|$; b) $y = xe^{-1/x}$; c) $y = (x+2)e^{1/x}$.

21. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu $Q_D = 300 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

22. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2640 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^2 + 1000\,Q + 100$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

23. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 1800 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế) là $P_1 = 500$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

24. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 20$ và $Q_D = 400 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế) là $P_1 = 310$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.