NGÂN HÀNG CÂU HỎI ÔN TẬP
MÔN TOÁN CAO CẤP

Câu 1:

Tìm các tiệm cận dưới và tiệm cận trên đúng trong R nếu chúng tồn tại của tập

$$X = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}, n \in N^* \right\} = \left\{ u_n, n \in N^* \right\}$$

Lời giải

Với mọi p thuộc N∗

$$u_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2p} \Rightarrow 0 < u_{2p} < u_2 = \frac{3}{4}$$

Ta có: $u_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2p+1} \Rightarrow \frac{-1}{3} \le \frac{-1}{2p+1} \le u_{2p+1} \le \frac{1}{2^{2p+1}} \le \frac{1}{8}$

$$u_1 = \frac{-1}{2}$$

Suy ra với mọi n thuộc N∗N∗

ta có: $\frac{-1}{2} = u_1 \le u_n \le u_2 = \frac{3}{4}$

InfX=minX=-1/2, SupX=maxX=3/4

Câu 2

Cho A, B là hai tập không rỗng của R và bị chặn trên

a: Chứng minh Sup(A∪BA∪B=Max(Sup(A),sup(B))

b: Gọi A+B= $\{x \in R, \exists (a,b) \in A.B, x = a + b\}$, chứng minh rằng Sup(A-B)=Sup(A)+Sup(B)

Lời giải

Kí hiệu: $\alpha = SupA, \beta = SupB, \gamma = Max(\alpha, \beta)$

Vậy tập hợp các cận trên của A∪ B chính là $X = \{x, x \ge \alpha, x \ge \beta$

Câu 3:

Hãy tìm tất cả các ánh xạ f: C--->C sao cho

Với mọi z thuộc C,f(z)+zf(-z)=1+z

Lời giải

Nếu tồn tại f(-z)-zf(z)=1-z đúng

suy ra $(1+z^2)f(z) = 1 + z^2$

Chứng tỏ f(z)=1 nếu $z \pm i$

Đạt f(i)= $\alpha + i\beta \in C, \alpha, \beta \in R \Rightarrow f(-i) = 1 - i + i\alpha - \beta$

f:C--->C

Kiểm tra $z \to \begin{cases} 1 \\ \alpha \\ 1-\beta+i(\alpha-1) \end{cases}$

Câu 4:

Tính $a.\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

$b.(1-i)(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+1)$

Lời giải

$a.z = \ z_1\ z_2\ z_{3,}\ z_1 = 1-i,\ z_2 = 1-\sqrt{3}i,\ z_3 = \sqrt{3}+i$

Ta đi tìm mooddun và acgumen của các số phức này

$r_1 = |\ z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \theta_1 = \arg\ z_1, \begin{cases} tg\theta_1 = -1 \\ tg\theta_1 > 0 \end{cases}$

$==> \theta_1 = \dfrac{-3,14}{4}$

Tương tự nhận được $r_2 = 2, \theta_2 = \dfrac{-\pi}{3},\ r_2 = 2, \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

Câu 5:

Chứng minh rằng với mọi z thuộc C thì

$\left[\begin{array}{l} |1+z| \geq \dfrac{1}{2} \\ |1+\ z^2| < 1 \end{array}\right.$

Lời giải:

Giả sử tồn tại z=x+iy thuộc c sao cho $\begin{cases} |1+z| < \dfrac{1}{2} \\ |1+\ z^2\ | < 1 \end{cases}$

$\begin{cases} (\ x^2+\ y^2)^2 + 2(x^2-\ y^2) < 0 \\ x^2+\ y^2+2x+\dfrac{3}{4} < 0 \end{cases}$

Câu 6

Cho f,g : R-->R thỏa mãn mọi x,y thuộc R,(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))=0

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hàm số là hằng số

Lời giải:

Giả sử a,b thuộc R,f(a) khác f(b),ta sẽ chỉ ra g(x) là hằng số.trước hết có với mọi x thuộc R $\begin{cases}\left(f(a)-f(x)\right)\left(g(a)-g(x)\right)=0\\ \left(f(b)-f(x)\right)\left(g(a)-g(x)\right)=0\end{cases}$

Trừ từng vế và để ý đến g(a)=g(b) suy ra

(f(a)-f(b))(g(a)-g(x))=0==>g(x)=g(a)

Câu 7.

Tìm hàm f(x) trên R sao cho x.f(x) + f(1-x)=x^3+1,với mọi x thuộc R

Giả sử tồn tại f(x), thay x bởi 1-x vào hệ thức đã cho:

(1-x).f(1-x)+f(x)=2-3x+3x^2−x^3

Suy ra: $\begin{aligned}&(x^2-x+1)f(x)=(x^2-x+1)^2\\ &\Rightarrow f(x)=(x^2-x+1)\end{aligned}$

Kiểm tra: $f(x)=(x^2-x+1)$

Câu 8

Cho $a\in R_+^*\setminus\{1\}$, giải phương trình $\log_a x-\log_{a^2} x+\log_{a^4} x=\dfrac{3}{4}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{aligned}&x\in R_+^*\\ &\ln x\left(\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{2\ln a}+\frac{1}{4\ln a}\right)=\frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \ln x=\ln a\Leftrightarrow x=a\end{aligned}$

Câu 9:

Giả phương trình sau arcsin (tgx)=x

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\\ tgx\in[-1,1]\Rightarrow x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

arcsin(tgx)=arcsin(sinx)

==>tgx=sinx

==.sinx(1-(1/cosx))=0

$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Rightarrow x=k\pi, k\in Z$

Vì $k\pi\notin\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{-\pi}{4}\right]$ nên phương trình vô nghiệm

Câu 10:

Tính $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

Lời giải:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\frac{2(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}\frac{2.2\sqrt{2}}{2.3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Câu 11:

Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

Lời giải:

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\frac{(cosx-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}$$

$$=\frac{-1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}+\frac{9}{2}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{(\frac{3x}{2})^2}$$

Câu 12:

Tính $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}, \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Lời giải:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{\left(-\frac{1+x^2}{2}\right)\left(\frac{-2x^2}{x^2+1}\right)} e^{-2}$$

Câu 13

Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}, \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$

Lời giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0$$

Câu 14

Cho f thuộc R khả vi tại a thuộc X, hãy tìm

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$$

Lời giải

$$\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$$

$$= h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

-->-f"(a)

Câu 15

Hãy tính đạo hàm tại 0 của các hàm số sau (nếu có)

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \\ 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Lời giải:

$$\frac{f_1(h)-f_1(0)}{h} = \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$

Câu 16

Chứng tỏ rằng f thuộc R cho bởi biểu thức dưới đây không khả vi tại mọi x thuộc R

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x \in Q \\ 3-x, x \in R/Q \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy tập Q và R/Q đều trù mật lấy x thuộc R

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in Q}} f(x) = x_0+1, \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in Q}} f(x) = 3-x_0$$

Vậy hàm không khả vi tại x khác 1

Xét 1+h thuộc Q....

Xét 1+h thuộc R\ Q

vậy không tồn tại f'(1)

Câu 17

Tính đạo hàm của hàm số

$$\begin{cases} y = t - \operatorname{arctg}t \\ x = \ln(1+t^2) \end{cases}$$

Lời giải:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(t-\operatorname{arctg}t)}{d\ln(1+t^2)} = \frac{t}{2}$$

Câu 18

Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x)=x^2\sin x$

Lời giải

Áp dụng công thức Leibnitz

$$f^{100}(x)=\sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\left(x^2\right)^{k}(\sin x)^{(100-k)}$$

=x[2]sĩn-200x.cosx-9900sinx

Câu 19

Cho f: (-1,1)-->R

f(x)= $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$

Hãy tính: $f^{n}(x)$

Lời giải:

Phân tích f(x) thành các phân thức tối giản

$$f(x)=\frac{5}{2}.\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{x+1}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{5}{2}(-1)^n.\frac{(n+1)!}{(x-1)^{2+n}}-\frac{1}{4}(-1)^n.\frac{(n)!}{(x-1)^{2+n}}+\frac{1}{4}(-1)^n.\frac{(n)!}{(x+1)^n}$$

Câu 20

Cho f,g thuộc C^2 trên R và h(x)= $\begin{cases} f(x), g(x)\geq 0 \\ f(x)+(g(x))^3\, g(x)<0 \end{cases}$

chứng minh h thuộc C^2 trên R

Lời giải:

Dễ dàng nhận được $\varphi(t)=\begin{cases} 0, t\geq 0 \\ t^3, t<0 \end{cases}$

thuộc lớp C^2 trên R ==>φφ thuộc C^2 trên R==>h=f+φφ thuộc C^2 trên R

Câu 21

Cho f: [0,1]-->[o,1],f liên tục khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f^2(x)dx$

Chứng minh f=1

Lời giải:

Xét $\int_0^1 f(1-f)dx=\int_0^1 fdx-\int_0^1 f^2dx=0$ theo giả thiết f(1-f)>=0 và f(1-f) liên tục [0,1]==>f(1-f)=0

với mọi x thuộc [0,1],vì f khác 0 suy ra

f=1 với mọi x thuộc [0,1]

Câu 22

Tính $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2}$

Lời giải:

Vơi x dương khá lớn sẽ có $(\ln x)^2 \le (\ln x^2)^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} \ge \frac{x^2-x}{(\ln x^2)^2} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} = +\infty$$

Câu 23

Cho f: [0,1]-->[o,1],f liên tục khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx$

Chứng minh f=1

Lời giải

Xét $\int_0^1 f(1-f)dx = \int_0^1 fdx - \int_0^1 f^2dx = 0$

theo giả thiết f(1-f)>=0 và f(1-f) liên tục [0,1]==>f(1-f)=0 với mọi x thuộc [0,1],vì f khác 0 suy ra

f=1 với mọi x thuộc [0,1]

Câu 24

Tính $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2}$

Lời giải

Vơi x dương khá lớn sẽ có $(\ln x)^2 \le (\ln x^2)^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} \ge \frac{x^2-x}{(\ln x^2)^2} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} = +\infty$$

Câu 25:

Xét sự hội tụ và phân kì của các tích phân sau:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{z\sqrt{1+x^2}}$$

Lời giải:

$\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} : \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ =1 ==> tích phân suy rộng phân kì

$\left(\frac{1}{z\sqrt{1+x^2}} : \frac{1}{x^2}\right)$=1==> tích phân suy rộng hội tụ

Câu 26

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng sau:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx, \alpha \in R, k \in R^*$$

Lời giải

$|\cos\alpha x| \le 1.\frac{1}{k^2+x^2} \sim \frac{1}{x^2}, x \to \infty$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx$ Hội tụ tuyệt đối

Câu 27

Xét sự tồn tại của tích phân suy rộng sau :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}, \alpha \in R$$

Lời giải

Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là ± 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{a}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin a - \lim_{x\to-\infty} \arcsin x + \lim_{x\to\infty} \arcsin x - \arcsin a = 3{,}14$$

Câu 28

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, |k|<1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$$

a. Hàm dưới dấu tích phân có một cực điểm x=1,là VCL cấp 1/2 so với VCL $\frac{1}{1-x}$ tại x=1.Vậy tích phân suy rộng hội tụ

b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}, \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ vậy hàm 1/lnx có cực điểm tại x=1

$\left(\frac{1}{\ln x} : \frac{1}{x-1}\right)$=1 (với x=1),tích phân suy rộng phân kì

Câu 29

Xét sự hội tụ của chuỗi cấp số nhân với công bội q

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,q^k, a\neq 0$$

Lời giải

Tính tổng riêng tứ n; $S_n = \begin{cases} a.\dfrac{q^n-1}{q-1}, q\neq 1 \\ na, q=1 \end{cases}$

Nếu |q|<1 thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

Nếu |q|>1 thì Sn không hội tụ

Vậy chuỗi cấp số nhân hội tụ khi và chỉ khi |q|<1

Câu 30:

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

Lời giải

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}[\ln k - \ln(k+1)]$$

=ln1-ln2+ln2-ln3+...+lnn-ln(n+1)=-ln(n+1)

$$\lim_{n\to\infty} = -\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = -\infty$$

Vậy chuỗi phân kì