BỘ ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

MÔN TOÁN CAO CẤP

Đề 01

Câu 1:

Cho số phức $z = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$.

Tính z^{2016} và $\sqrt[5]{z}$

Lời giải:

$$z = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i = z = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos\frac{7\pi}{12} i\sin\frac{7\pi}{12})$$

$$z^{2016} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{2016}}\left(\cos\frac{7\pi.2016}{12} + i\sin\frac{7\pi.2016}{12}\right)$$

$$k = 0,1,2,3,4$$

Câu 2:

Cho hàm số: $\begin{cases} \frac{x.\ln(3x+1)}{e^{x^2}-1}, x>0 \\ 3\cos x + x, x \le 0 \end{cases}$

a. Khảo sát sự liên tục của hàm f(x) tại x=0

b.Tính f'(1)

Lời giải:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(3x+1)}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3\cos x + x) = 3$$

$$f(0) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Nên hàm số liên tục tại 0

$$x>0,\ f'(x) = \frac{\left(\ln(3x+1) + \frac{3x}{3x+1}\right)(e^{x^2-1}) - 2x^2.e^{x2}.\ln(3x+1)}{(e^{x^2-1})^2}$$

b.

$$f'(1) = \frac{(\ln 4 + \frac{3}{4})(e-1) - 2e\ln 4}{(e-1)^2}$$

TXD: R,T=2 $f'(1)=\dfrac{(\ln 4+\frac{3}{4})(e-1)-2e\ln 4}{(e-1)^2}$

π

Bảng biến thiên...

Vẽ đồ thị...

Câu 3:

a. Tính tích phân suy rộng I=$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}}dx$

b. Khảo sát sự hội tụ của tíc phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+2}{x^5-x+3}$

Lời giải:

$$I=\lim_{a\to 2^-}\int\limits_0^a \frac{x}{\sqrt{2-x}}dx$$

a. I = $I=\lim_{a\to 2^-}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2-a}}(2t^2-4)$

$$I=\lim_{a\to 2^-}\left(\frac{2t^3}{3}-4t\right)\Bigg|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2-a}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

b. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^5-x+3}, g(x)=\dfrac{1}{x^2}, \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ hội tụ $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^3+2}{x^5-x+3}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2

Câu 4:

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$

Lời gải:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}<1$$

Nên chuỗi hội tụ

Đề 02

Câu 1

a. Phát biểu và tổ hợp tuyến tính của một hệ véc tơ và sự biểu diễn tuyến tính của một véc tơ qua một hệ véc tơ trong không gian véc tơ R^n

b. Trong không gian R^3 cho $H = \{A_1, A_2, A_3, X\}$

Biết rằng tập hợp $T = \{t = (t_1, t_2, t_3) \in R^3 : X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3\} \neq \varnothing$

Cho nhận định về số phần tử của T

Lời giải

Mỗi phần tử của T tương ứng với một cách biểu diễn tuyến tính của X qua hệ véc tơ {A1, A2, A3} {A1, A2, A3} và cũng là tương ứng với một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính t1A1+t2A2+t3A3

Câu 2:

a. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

b. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n-1}{2+3^n}\right)(x-1)^2$

Lời giải:

Đặt $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$

Mặt khác chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì ==>chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ phân kỳ

Câu 3:

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, |k|<1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$$

Lời giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có một cực điểm x=1,là VCL cấp 1/2 so với VCL $\frac{1}{1-x}$ tại x=1.Vậy tích phân suy rộng hội tụ

b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x} = 0$ vậy hàm 1/lnx có cực điểm tại x=1

$\left(\frac{1}{\ln x}:\frac{1}{x-1}\right)$ =1 (với x=1),tích phân suy rộng phân kì

Đề 03

Câu 1:

Tính

a. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

Lời giải:

a. $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\frac{2(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}\frac{2.2\sqrt{2}}{2.3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\frac{(cosx-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}$

b. $=\frac{-1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}+\frac{9}{2}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{(\frac{3x}{2})^2}$

Câu 2:

Chứng tỏ rằng f thuộc R cho bởi biểu thức dưới đây không khả vi tại mọi x thuộc R

$f(x)=\begin{cases}x+1, x\in Q\\ 3-x, x\in R/Q\end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy tập Q và R/Q đều trù mật lấy x thuộc R

$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in Q}} f(x)= x_0+1, \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in Q}} f(x)=3- x_0$

Vậy hàm không khả vi tại x khác 1

Xét 1+h thuộc Q....

Xét 1+h thuộc R\ Q

Vậy không tồn tại f'(1)

Câu 3:

Cho hàm số $\begin{cases}\frac{x.\ln(3x+1)}{e^{x^2}-1}, x>0\\ 3\cos x+x, x\le 0\end{cases}$

a. Khảo sát sự liên tục của hàm f(x) tại x=0

b.Tính f'(1)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(3x+1)}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3\cos x + x) = 3$

$f(0) = 3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Nên hám số liên tục tại 0

$$x>0,\ f'(x) = \frac{\left(\ln(3x+1) + \frac{3x}{3x+1}\right)(e^{x^2-1}) - 2x^2.e^{x2}.\ln(3x+1)}{(e^{x^2-1})^2}$$

b.

$$f'(1) = \frac{(\ln 4 + \frac{3}{4})(e-1) - 2e\ln 4}{(e-1)^2}$$

TXD: R,T=2 $f'(1) = \frac{(\ln 4 + \frac{3}{4})(e-1) - 2e\ln 4}{(e-1)^2}$

π

Bảng biến thiên...

Vẽ đồ thị...

Câu 4:

Tính tích phân suy rộng sau $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Lời giải:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = \lim_{c\to+\infty} (\arctan(e^x)\Big|_0^{+\infty})$$

$$= \frac{\pi}{4}$$